Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

Autor: Weber, Claude

Kapitel: 3. Revêtements cycliques de S^3, ramifiés sur un nœud

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50382

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\left[\begin{array}{c|c}
\begin{array}{cccc} m \text{ colonnes} & & & \\ a_n & & & \\ a_{n-1} & a_n & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & a_n \end{array} & \begin{array}{c} n \text{ colonnes} \\ \\ 0 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline
\begin{array}{cccc} \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_0 & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ & a_0 & & \\ & & & a_0 \end{array} & \begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi(f^{n-1}\bar{g}) & \cdots & \Phi(\bar{g}) \\ & & \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}
\end{array}\right]$$

Dans la matrice précédente, $\Phi(f^j\bar{g})$ désigne un vecteur colonne dans la base $(e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_0)$.

Comme $|a_n| = 1$, le groupe ainsi présenté est isomorphe à $\mathscr{M}/\mathscr{N}$.

Le déterminant de cette dernière matrice est égal, en valeur absolue, d'une part à l'ordre du groupe $\mathscr{M}/\mathscr{N}$ et d'autre part, par construction, à Rés (f, g). C.q.f.d.

3. Revêtements cycliques de S^3, ramifiés sur un nœud

Soit K un nœud apprivoisé dans S^3. Désignons par X le complémentaire du nœud $S^3 - K$, par X_∞ le revêtement cyclique infini de X, par X_m le revêtement cyclique à m feuilles de X, par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur K.

Considérons K et S^3 comme orientés. Alors, via des conventions fixées une fois pour toutes, on obtient un générateur t du groupe de Galois du revêtement $X_\infty \to X$.

Les « groupes » d'homologie $H_1(X_\infty, R)$, $H_1(\hat{X}_m, R)$ et $H_1(X_m, R)$ sont alors munis d'une structure de RT-modules, t agissant via Galois.

Les faits suivants sont bien connus. Pour une démonstration, voir [4].

(i) $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}T$-module de type fini. (C'est essentiellement une conséquence du fait que $\mathbf{Z}T$ est nœthérien.)

(ii) $H_1(\hat{X}_m; R) \approx \operatorname{Coker}\{1 - t^m : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty, R)\}$.
(C'est une conséquence de la « suite exacte de Milnor »).
Si l'on fait $m = 1$ dans la dernière égalité et si l'on utilise le fait que RT est nœthérien, on obtient que $1 - t : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty; R)$ est un isomorphisme pour tout R nœthérien.

(iii) $H_1(X_\infty, \mathbf{Q})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}$.
(Conséquence facile du dernier argument par $R = \mathbf{Q}$.)
Le résultat suivant est dû à R. H. Crowell [1].

(iv) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module admettant une présentation carrée (c'est-à-dire: nombre de générateurs égal au nombre de relations). Soit $\Delta \in \mathbf{Z}T$ le déterminant de cette présentation. (Δ est le générateur du premier idéal élémentaire de A.) Alors A est sans $\mathbf{Z}$-torsion si et seulement si Δ est « primitif » (c'est-à-dire si ses coefficients sont premiers entre eux).
Il est classique que $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ satisfait les hypothèses du théorème de Crowell.
Le dernier fait dont nous aurons besoin est dû à M. Kervaire [5]:

(v) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini et tel que la multiplication par $(1-t)$ soit un isomorphisme, alors le sous-groupe de $\mathbf{Z}$-torsion de A est fini.

4. La formule de R. H. Fox

Conformément à nos conventions du paragraphe précédent, désignons par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur nœud de polynôme d'Alexander Δ. *La formule de Fox* s'énonce ainsi:

$H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est fini si et seulement si $\operatorname{Rés}(1-t^m, \Delta) \neq 0$. En ce cas l'ordre du groupe $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est égal à $|\operatorname{Rés}(1-t^m, \Delta)|$.