1. Introduction

TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

par Pierre JEANQUARTIER

1. INTRODUCTION

La transformée de Mellin d'une fonction f intégrable à support compact sur $\mathbf{R}_+ =]0, \infty[$ est la fonction entière $\mathfrak{M}f$ définie par

$$\mathfrak{M}f(z) = \int_0^\infty f(t)\, t^{z-1}\, dt\,. \tag{1.1}$$

Lorsqu'on se propose d'étendre la définition (1.1) au cas d'une fonction localement intégrable ou plus généralement d'une distribution f sur $\mathbf{R}_+$, des conditions de croissance au voisinage de 0 et de ∞ doivent être imposées à f. Comme la transformation $t \mapsto t^{-1}$ échange des voisinages de 0 et de l'infini, on ne restreint pas la généralité en ne considérant que des distributions nulles au voisinage de l'infini. En fait, on définira la transformation de Mellin $\mathfrak{M}$ dans l'espace $\mathscr{E}'_+$ des distributions sur $\mathbf{R}_+$ qui sont restriction de distributions à support compact sur $\mathbf{R}$. $\mathfrak{M}$ est alors un isomorphisme de $\mathscr{E}'_+$, considéré comme algèbre de convolution, sur une algèbre multiplicative $\mathscr{H}_+$ de fonctions holomorphes dans des demi-plans $\operatorname{Re} z > r$, satisfaisant à une condition de croissance. Deux théorèmes du type de Paley-Wiener permettent de caractériser par leur transformée de Mellin les distributions à support compact et les fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure $t^{-1}\, dt$. Comme application, on définit des sous-espaces $\mathscr{E}^s_r$ de $\mathscr{E}'_+$, analogues aux espaces de Sobolev, conduisant à une classification des distributions en fonction de leur régularité et de leur ordre de grandeur au voisinage de l'origine. Ces espaces permettent de définir des développements asymptotiques en un sens généralisé au voisinage de l'origine, et de caractériser, par des propriétés de méromorphie et de croissance, les transformées de Mellin de distributions admettant de tels développements. A titre d'exemple, on reprend les résultats d'Atiyah [1] sur la méromorphie de l'application $z \mapsto A_+^{z-1}$, A étant une fonction analytique réelle sur une variété. Cette application, qui est la transformée de Mellin de l'application

$t \mapsto \delta_t(A)$, $\delta_t(A)$ étant l'image réciproque par A de la mesure de Dirac au point t, vérifie les conditions pour que ce soit la transformée d'une application admettant un développement asymptotique; on retrouve ainsi le résultat de [4] sur l'existence d'un développement asymptotique pour $\delta_t(A)$ lorsque t tend vers zéro.

Il est à peine nécessaire de signaler que le présent travail ne contient rien de vraiment original puisque la plupart des résultats qu'il présente figurent, sous des formes plus ou moins équivalentes, dans l'abondante littérature consacrée aux transformations intégrales, notamment aux transformations de Laplace et de Mellin (voir par exemple [6], [2], [7], [8], [3] et [9]). Toutefois, sa publication n'a pas paru inutile vu que le mode d'exposition choisi est bien adapté à la transformation de Mellin et à son application à l'étude du comportement d'une distribution au voisinage de l'origine. C'est d'ailleurs l'emploi fructueux que [5] fait de cette transformation qui a motivé la rédaction de ce texte, et l'auteur tient à préciser qu'il s'est particulièrement inspiré du travail de diplôme de H.-M. Maire (non publié) et de [5].

Notations. On désigne par $\mathbf{R}_+$ la demi-droite *ouverte* $]0, \infty[$. Sur $\mathbf{R}$, la fonction t_+^z $(z \in \mathbf{C})$ est nulle pour $t \leqslant 0$ et égale à t^z pour $t > 0$. Pour $m \in \mathbf{N}$ (ensemble des entiers $\geqslant 0$), C_+^m est l'espace des fonctions de classe C^m sur $\mathbf{R}_+$, à support borné, qui sont prolongeables en fonctions C^m sur $\mathbf{R}$.

Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{D}(U)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans U; son dual $\mathcal{D}'(U)$ est l'espace des distributions dans U. La valeur de $T \in \mathcal{D}'(U)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ est notée $\langle T, \varphi \rangle$.

On utilisera souvent l'opérateur $D = t \dfrac{d}{dt}$ invariant par les homothéties de $\mathbf{R}_+$. La démonstration du lemme suivant est immédiate:

Lemme 1.1. *Pour tout entier* $m \geqslant 1$, *il existe des constantes* $a_j^m > 0$ *et* b_j^m, $1 \leqslant j \leqslant m$, *avec* $a_m^m = b_m^m = 1$, *telles que*

$$D^m f = \sum_{j=1}^{m} a_j^m t^j f^{(j)}, \tag{1.2}$$

$$t^m f^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} b_j^m D^j f, \tag{1.3}$$

pour toute distribution f *sur* $\mathbf{R}$.

Lemme 1.2. *Soit* $f \in C_+^0$, $p \in \mathbf{C}$ *et* $m \in \mathbf{N}$. *Si* $\operatorname{Re} p + k > 0$, *avec* $k \in \mathbf{N}$, *il existe* $g \in C_+^0$ *unique tel que, dans* $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$, $t^p f^{(m)} = g^{(m+k)}$.

Démonstration. Cas $m = 0$: Le résultat est évident si $k = 0$. Si $k > 0$, il suffit de prendre

$$g(t) = \int_\infty^t \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} f(u) u^p \, du, \qquad t > 0.$$

Supposons le résultat vrai pour m remplacé par $m - 1$. On a

$$t^p f^{(m)} = (t^p f^{(m-1)})' - p\, t^{p-1} f^{(m-1)}.$$

Par hypothèse

$$t^p f^{(m-1)} = g_1^{(m+k-1)}, \qquad t^{p-1} f^{(m-1)} = g_2^{(m+k)},$$

avec $g_1, g_2 \in C_+^0$. On a donc $t^p f^{(m)} = g^{(m+k)}$ avec $g = g_1 - p\, g_2 \in C_+^0$.
L'unicité de g résulte de ce que son support est borné.

Lemme 1.3. *Soit* $f \in C_+^0$ *et* $m \geqslant 1$ *entier. Il existe des fonctions* g_0, g_m *et* h_m *uniques dans* C_+^0 *telles que, dans* $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$,

(1.4) $$f = D(t^{-1} g_0),$$

(1.5) $$t^{-m} f = D(t^{-m} g_m),$$

(1.6) $$D^m(t^{1-m} f) = t\, D^m(t^{-m} h_m).$$

Démonstration. Pour (1.4) et (1.5), il suffit de prendre

$$g_0(t) = t \int_\infty^t f(u) u^{-1} \, du, \qquad g_m(t) = \int_\infty^1 f(ts) s^{-m-1} \, ds.$$

Pour prouver (1.6), on utilise la formule de Leibniz:

$$D^m(t^{1-m} f) = t\, D^m(t^{-m} f) + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} t\, D^j(t^{-m} f).$$

D'après (1.5), il existe $f_j \in C_+^0$ telle que $D^j(t^{-m} f) = D^m(t^{-m} f_j)$. On a donc (1.6) avec

$$h_m = f + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} f_j.$$

L'unicité provient de ce que les fonctions cherchées sont à support borné.

Lemme 1.4. *Etant donné* $f \in C^0_+$ et $m \in \mathbf{N}$, *il existe* $g \in C^0_+$ *unique tel que, dans* $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$, $f^{(m)} = D^m(t^{-m} g)$.

Démonstration. Le résultat est vrai pour $m = 0$. Si $m > 0$, on a $f^{(m)} = t^{-1} D f^{(m-1)}$ où l'on peut supposer, par récurrence, que $f^{(m-1)} = D^{m-1}(t^{-m+1} h)$, avec $h \in C^0_+$. D'après le lemme 1.3 on a donc $f^{(m)} = t^{-1} D^m (t^{-m+1} h) = D^m (t^{-m} g)$, avec $g \in C^0_+$. g est unique puisque nulle au voisinage de l'infini.

Espace $\mathscr{E}'_+$. $\mathscr{E}'_+$ est le sous-espace de $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$ formé des distributions qui sont prolongeables en distributions à support compact sur $\mathbf{R}$.

Proposition 1.5. *Soit* $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $T \in \mathscr{E}'_+$.

2) *Il existe* $m \in \mathbf{N}$ *et* $f \in C^0_+$ *tels que* $T = f^{(m)}$.

3) *Il existe* $m, q \in \mathbf{N}$ *et* $g \in C^0_+$ *tels que* $T = D^m(t^{-q} g)$.

Démonstration. 1) et 2) sont équivalents: Si $T \in \mathscr{E}'_+$, il existe une fonction f_1 continue sur $\mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $f_1^{(m)}$ soit un prolongement de T ([7], théorème 26, page 91). En ajoutant un polynôme de degré $< m$ à f_1, on peut supposer que cette fonction est nulle au voisinage de $+\infty$. Alors $T = f^{(m)}$ où $f \in C^0_+$ est la restriction de f_1 à $\mathbf{R}_+$. Inversement, si $T = f^{(m)}$ avec $f \in C^0_+$, T est la restriction de $f_1^{(m)}$ où f_1 est un prolongement continu à support compact de f, donc $T \in \mathscr{E}'_+$.

2) entraîne 3) d'après le lemme 1.4.

3) entraîne 1) car si $f \in C^0_+$, $t^{-q} f \in \mathscr{E}'_+$ en vertu du lemme 1.2 et par conséquent $D^m(t^{-q} f) \in \mathscr{E}'_+$.

Lemme 1.6. *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans la bande* $a < \operatorname{Re} z < b$ *et telle que* $\int |F(x+iy)|^2 dy \leqslant M^2$ *pour* $a < x < b$. *Alors, si* $r > 0$, $|F(z)| \leqslant M(\pi r)^{-1/2}$ *pour* $a+r < \operatorname{Re} z < b-r$.

Démonstration. (Voir aussi [6], théorème 3, page 5). Prenons $z = x+iy$ tel que $a+r < x < b-r$. On a

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta(s)} \frac{F(w)}{w-z} dw,$$

$\delta(s)$ étant le rectangle $x+r-is$, $x+r+is$, $x-r+is$, $x-r-is$, où $s > |y|$. Si γ est un des côtés du rectangle parallèle à l'axe imaginaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_\gamma \frac{F(w)}{w-z} \, dw \right|^2 \leqslant M^2 \int \frac{dv}{r^2 + (v-y)^2} = M^2 \pi / r .$$

Soit $I(s) = \int_{\sigma(s)} \frac{F(w)}{w-z} \, dw$, $\sigma(s)$ étant le segment $x-r+is$, $x+r+is$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|I(s)|^2 \leqslant \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2 \, du \int_{x-r}^{x+r} \frac{du}{(u-x)^2 + (s-y)^2}$$
$$\leqslant \pi \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2 \, du ,$$

en supposant $|s| \geqslant |y| + 1$. Par conséquent

$$\int_{|y|+1}^{\infty} (|I(s)|^2 + |I(-s)|^2) \, ds \leqslant 2\pi r \, M^2 .$$

Il existe donc une suite (s_j) convergeant vers $+\infty$ et telle que $|I(s_j)|^2 + |I(-s_j)|^2$ tende vers 0 lorsque $j \to \infty$. On a donc $2\pi \, |F(z)| \leqslant 2\,\mathrm{M}\,(\pi/r)^{1/2} + |I(s_j)| + |I(-s_j)|$ pour tout j, d'où le résultat lorsque $j \to \infty$

2. La transformation de Mellin et son inverse

Transformation de Mellin. Si $T \in \mathscr{E}'_+$, soit T_1 une distribution à support compact sur **R** qui prolonge T. Il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que T_1 soit d'ordre fini $\leqslant m$ (cf. [7] théorème 24, page 88). Par conséquent, la fonction de z donnée par $F(z) = \langle T_1, t_+^{z-1} \rangle$ est définie et holomorphe pour $\operatorname{Re} z > m + 1$ et elle ne dépend pas du prolongement T_1 de T choisi. En effet, d'une part l'application $z \mapsto t_+^{z-1}$ définit une fonction holomorphe pour $\operatorname{Re} z > m + 1$, à valeurs dans l'espace des fonctions de classe C^m sur **R**; d'autre part, si T_2 est un autre prolongement de T, pour $\operatorname{Re} z$ assez grand, t_+^{z-1} est nul sur le support de $T_1 - T_2$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de $T_1 - T_2$ (cf. [7] théorème 28, page 93). La fonction F est appelée *transformée de Mellin* de T et notée $F = \mathfrak{M}T$.