

2. La transformation de Mellin et son inverse

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$\delta(s)$ étant le rectangle $x+r-is, x+r+is, x-r+is, x-r-is$, où $s > |y|$. Si γ est un des côtés du rectangle parallèle à l'axe imaginaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_{\gamma} \frac{F(w)}{w-z} dw \right|^2 \leq M^2 \int \frac{dv}{r^2 + (v-y)^2} = M^2 \pi / r .$$

Soit $I(s) = \int_{\sigma(s)} \frac{F(w)}{w-z} dw$, $\sigma(s)$ étant le segment $x-r+is, x+r+is$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |I(s)|^2 &\leq \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2 du \int_{x-r}^{x+r} \frac{du}{(u-x)^2 + (s-y)^2} \\ &\leq \pi \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2 du , \end{aligned}$$

en supposant $|s| \geq |y| + 1$. Par conséquent

$$\int_{|y|+1}^{\infty} (|I(s)|^2 + |I(-s)|^2) ds \leq 2\pi r M^2 .$$

Il existe donc une suite (s_j) convergeant vers $+\infty$ et telle que $|I(s_j)|^2 + |I(-s_j)|^2$ tende vers 0 lorsque $j \rightarrow \infty$. On a donc $2\pi |F(z)| \leq 2M(\pi/r)^{1/2} + |I(s_j)| + |I(-s_j)|$ pour tout j , d'où le résultat lorsque $j \rightarrow \infty$

2. LA TRANSFORMATION DE MELLIN ET SON INVERSE

TRANSFORMATION DE MELLIN. Si $T \in \mathcal{E}'_+$, soit T_1 une distribution à support compact sur \mathbf{R} qui prolonge T . Il existe un entier $m \geq 0$ tel que T_1 soit d'ordre fini $\leq m$ (cf. [7] théorème 24, page 88). Par conséquent, la fonction de z donnée par $F(z) = \langle T_1, t_+^{z-1} \rangle$ est définie et holomorphe pour $\operatorname{Re} z > m + 1$ et elle ne dépend pas du prolongement T_1 de T choisi. En effet, d'une part l'application $z \mapsto t_+^{z-1}$ définit une fonction holomorphe pour $\operatorname{Re} z > m + 1$, à valeurs dans l'espace des fonctions de classe C^m sur \mathbf{R} ; d'autre part, si T_2 est un autre prolongement de T , pour $\operatorname{Re} z$ assez grand, t_+^{z-1} est nul sur le support de $T_1 - T_2$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de $T_1 - T_2$ (cf. [7] théorème 28, page 93). La fonction F est appelée *transformée de Mellin* de T et notée $F = \mathfrak{M}T$.

PROPOSITION 2.1. Si $T \in \mathcal{E}'_+$, on a $DT \in \mathcal{E}'_+$ et $t^p T \in \mathcal{E}'_+$ pour tout $p \in \mathbf{C}$. De plus

$$(2.1) \quad \mathfrak{M}(DT)(z) = -z\mathfrak{M}T(z),$$

$$(2.2) \quad \mathfrak{M}(t^p T)(z) = \mathfrak{M}T(z+p).$$

Démonstration. Si $T \in \mathcal{E}'_+$, il est clair que $DT \in \mathcal{E}'_+$. Le lemme 1.2 et la proposition 1.5 montrent que $t^p T \in \mathcal{E}'_+$ si $p \in \mathbf{C}$.

Soit T_1 une distribution à support compact, d'ordre $\leq m$, qui prolonge T . Pour $\operatorname{Re} z > m + 2$, on a $z\mathfrak{M}T(z) = \langle T_1, zt_+^{z-1} \rangle = -\langle T'_1, t_+^z \rangle = -\langle DT_1, t_+^{z-1} \rangle = -\mathfrak{M}(DT)(z)$, puisque DT_1 est un prolongement de DT .

Soit maintenant k un entier ≥ 0 tel que $\operatorname{Re} p + k > m$. Alors t_+^{p+k} est de classe C^m et $t_+^{p+k} T_1$ est un prolongement de $S = t^{p+k} T$; on a donc, pour $\operatorname{Re} z > m + 1$, $\mathfrak{M}S(z) = \langle t_+^{p+k} T_1, t_+^{z-1} \rangle = \langle T_1, t_+^{z+p+k-1} \rangle = \mathfrak{M}T(z+p+k)$. En outre, $S = t^k t^p T$, de sorte que si T_2 est un prolongement de $t^p T$, $t^k T_2$ est un prolongement de S ; par suite, pour $\operatorname{Re} z$ assez grand, $\mathfrak{M}S(z) = \langle t^k T_2, t_+^{z-1} \rangle = \langle T_2, t_+^{z+k-1} \rangle = \mathfrak{M}(t^p T)(z+k)$. Finalement, $\mathfrak{M}(t^p T)(z) = \mathfrak{M}S(z-k) = \mathfrak{M}T(z+p)$, c.q.f.d.

ALGÈBRE \mathcal{E}'_+ . Si S et T appartiennent à \mathcal{E}'_+ , on définit la convolution $S * T$ de S et T comme la distribution sur \mathbf{R}_+ donnée par

$$(2.3) \quad \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(s) \otimes T(t), \varphi(st) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+).$$

C'est la convolution associée à la structure de groupe multiplicatif de \mathbf{R}_+ . On a $S * T \in \mathcal{E}'_+$; en effet, si S_1 et T_1 sont des prolongements respectifs de S et T , $S * T$ est la restriction de $S_1 * T_1$ définie sur \mathbf{R} par une formule analogue à (2.3). Muni de la convolution, \mathcal{E}'_+ est une algèbre commutative sur le corps \mathbf{C} .

ALGÈBRE \mathcal{H}_+ . Nous considérerons des fonctions holomorphes définies dans des domaines du plan \mathbf{C} contenant des demi-plans du type $\operatorname{Re} z > r$ ($r \in \mathbf{R}$). Deux telles fonctions seront identifiées si elles coïncident dans un tel demi-plan. Nous désignerons par \mathcal{H}_+ l'espace des (classes de) fonctions F du type précédent vérifiant une inégalité

$$(2.4) \quad |F(z)| \leq C(1+|z|)^m a^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z > r,$$

où les constantes $C > 0$, $m \in \mathbf{Z}$, $a > 0$ et $r \in \mathbf{R}$ dépendent de F . \mathcal{H}_+ est une algèbre pour le produit $FG : z \rightarrow F(z)G(z)$, $F, G \in \mathcal{H}_+$.

Par exemple, si $T \in \mathcal{E}'_+$, la transformée de Mellin $F = \mathfrak{M}T$ de T appartient à \mathcal{H}_+ . En effet, si le support de T est contenu dans $]0, a]$, il existe $f \in C_+^0$ nulle pour $t \geq a$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $T = f^{(m)}$ (proposition 1.5); par suite

$$\mathfrak{M}T(z) = (-1)^m (z-1)(z-2)\dots(z-m) \int_0^a f(t) t^{z-m-1} dt$$

vérifie (2.4) avec $r > m$.

On vérifie sans peine que \mathfrak{M} est un homomorphisme de l'algèbre \mathcal{E}'_+ dans l'algèbre \mathcal{H}_+ .

TRANSFORMATION DE MELLIN INVERSE. Soit $F \in \mathcal{H}_+$ vérifiant (2.4). Si j est un entier ≥ 0 tel que $j > m + 1$, posons pour $t > 0$

$$(2.5) \quad K_j F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z) z^{-j} dz,$$

où $\gamma(s)$ désigne la droite $\operatorname{Re} z = s$ orientée dans le sens $\operatorname{Im} z$ croissant, avec $s > r$ (on peut supposer $r > 0$). Il est clair que $K_j F$ est une fonction continue sur \mathbf{R}_+ ne dépendant pas de $s > r$. D'autre part, si $x > r$,

$$2\pi t^x K_j F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy \log t} F(x+iy) (x+iy)^{-j} dy,$$

où l'intégrale tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +0$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Il s'ensuit que $t^x K_j F$ est continue sur $\overline{\mathbf{R}}_+$ si $x > r$. Enfin, d'après (2.4), $|K_j F(t)| \leq M(a/t)^x$ pour x assez grand, où M est une constante positive; par conséquent, en faisant tendre x vers l'infini, on obtient que $K_j F(t)$ est nul pour $t > a$ et $K_j F \in C_+^0$.

On définit donc un élément $\mathfrak{N}F$ de \mathcal{E}'_+ en posant, pour $j > m + 1$,

$$(2.6) \quad \mathfrak{N}F = (-D)^j K_j F,$$

et $\mathfrak{N}F$ ne dépend pas de j puisque, en vertu de (2.5), $-DK_{j+1}F = K_j F$. La distribution $\mathfrak{N}F$ est appelée *transformée de Mellin inverse* de F et \mathfrak{N} définit une application linéaire de \mathcal{H}_+ dans \mathcal{E}'_+ .

D'après (2.5), $K_j F(t)$ est limite uniforme sur tout compact de \mathbf{R}_+ des fonctions

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iA}^{s+iA} t^{-z} F(z) z^{-j} dz$$

lorsque A tend vers l'infini, avec $s > r$. Il en résulte que $\mathfrak{N}F$ est limite dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+)$ des fonctions continues

$$(2.7) \quad t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iA}^{s+iA} t^{-z} F(z) dz,$$

lorsque A tend vers l'infini, $s > r$.

PROPOSITION 2.2. Si $F \in \mathcal{H}_+$, les fonctions $z \mapsto zF(z)$ et $z \mapsto F(z+p)$, avec $p \in \mathbf{C}$, appartiennent à \mathcal{H}_+ . De plus

$$(2.8) \quad \mathfrak{N}[zF(z)] = -D\mathfrak{N}[F(z)],$$

$$(2.9) \quad \mathfrak{N}[F(z+p)] = t^p \mathfrak{N}[F(z)], \quad p \in \mathbf{C}.$$

Démonstration. Il est clair que \mathcal{H}_+ est invariant par multiplication par z et par translation dans \mathbf{C} . Pour j assez grand, on a d'après (2.5)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[zF(z)] &= (-D)^{j+1} K_{j+1}[zF(z)] = (-D)^{j+1} K_j[F(z)] \\ &= -D\mathfrak{N}[F(z)]. \end{aligned}$$

Pour k et j assez grands, on a de même

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[F(z)] &= (-D)^k K_k[F(z)] = (-D)^k (-D+p)^j K_k[(z+p)^{-j}F(z)] \\ &= (-D+p)^j K_0[(z+p)^{-j}F(z)], \end{aligned}$$

et par suite

$$\mathfrak{N}[F(z+p)] = (-D+p)^j K_0[(z+p)^{-j}F(z+p)],$$

d'où, en faisant le changement de variable $z+p \mapsto z$ dans l'intégrale (2.5) donnant K_0 ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[F(z+p)] &= (-D+p)^j (t^p K_j[F(z)]) \\ &= t^p (-D)^j K_j[F(z)] = t^p \mathfrak{N}[F(z)], \end{aligned}$$

c.q.f.d.

THÉORÈME 2.3. La transformation de Mellin \mathfrak{M} est un isomorphisme de l'algèbre \mathcal{E}'_+ sur l'algèbre \mathcal{H}_+ d'inverse \mathfrak{N} .

Démonstration. On sait déjà que $\mathfrak{M} : \mathcal{E}'_+ \rightarrow \mathcal{H}_+$ est un homomorphisme.

Montrons que $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ est l'identité sur \mathcal{E}'_+ . Si $T \in \mathcal{E}'_+$, on a $T = (-D)^m (t^{-a} f)$ avec m et $q \in \mathbf{N}$ et $f \in C_+^0$ (proposition 1.5). Par suite (propo-

sition 2.1), $\mathfrak{M}T(z) = z^m \mathfrak{M}f(z-q)$ et (proposition 2.2) $\mathfrak{M}\mathfrak{M}T = (-D)^m (t^{-q} \mathfrak{M}\mathfrak{M}f)$. Il suffit donc de vérifier que $\mathfrak{M}\mathfrak{M}f = f$ pour $f \in C_+^0$. Mais alors $\mathfrak{M}f$ satisfait à l'inégalité (2.4) avec $m = 0$ et $\mathfrak{M}\mathfrak{M}f = D^2 K_2 Mf$, c'est-à-dire, avec $x > 0$,

$$\begin{aligned} 2\pi \mathfrak{M}\mathfrak{M}f &= D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-x-iy} \frac{\mathfrak{M}f(x+iy)}{(x+iy)^2} dy \\ &= D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{t^{-x-iy} s^{x+iy-1}}{(x+iy)^2} f(s) ds, \end{aligned}$$

intégrales absolument convergentes. En intégrant d'abord par rapport à y on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (s/t)^{x+iy} \frac{dy}{(x+iy)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq t, \\ \log(s/t) & \text{si } s \geq t. \end{cases}$$

On a donc $\mathfrak{M}\mathfrak{M}f = D^2 \int_t^{\infty} \log(s/t) f(s) s^{-1} ds = f$.

Montrons que $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$ est l'identité sur \mathcal{H}_+ . Si $F \in \mathcal{H}_+$, on a $F(z) = z^m G(z)$ où G est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > r$ et

$$|G(z)| \leq C(1+|z|)^{-2} a^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z > r,$$

C, a et $r > 0, m \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\mathfrak{M}F = (-D)^m \mathfrak{M}G$ et $\mathfrak{M}\mathfrak{M}F = z^m \mathfrak{M}\mathfrak{M}G$ (propositions 2.2 et 2.1), d'où le résultat si $\mathfrak{M}\mathfrak{M}G = G$. Or $\mathfrak{M}G(t) = \frac{1}{2\pi i}$

$\int_{\gamma(u)} t^{-z} G(z) dz$, $\gamma(u)$ droite $\operatorname{Re} z = u$ avec $u > r$. Par suite, $\mathfrak{M}G(t) = t^{-u} g(t)$ avec $2\pi g(t) = \int t^{-iv} G(u+iv) dv$. On a $g \in C_+^0$, $\operatorname{supp} g \subset]0, a]$ d'où

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}G(z) = \int_0^a t^{z-u-1} g(t) dt.$$

Pour $x > u > r$ on a donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\mathfrak{M}G(x+iy) &= \int_0^a t^{x+iy-u-1} g(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a dt \int_{-\infty}^{+\infty} t^{x+iy-u-iv-1} G(u+iv) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^{x+iy-u-iv}}{x+iy-u-iv} G(u+iv) dv \end{aligned}$$

$$= \text{résidu au point } z \text{ de la fonction } w \mapsto \frac{G(w) a^{z-w}}{w-z}$$

$$= G(x+iy).$$

Remarques. 1) Il résulte de ce qui précède que si $T \in \mathcal{E}'_+$ et $F = \mathfrak{M}T \in \mathcal{H}_+$, le support de T est contenu dans $]0, c]$ si et seulement si F vérifie une inégalité (2.4) avec $a = c$.

2) Si T est la restriction à \mathbf{R}_+ d'une distribution d'ordre $\leq n$ sur \mathbf{R} , F vérifie (2.4) avec $m = n$. Inversement si F vérifie (2.4), $T = (-D)^{m+2} K_{m+2} F$ est d'ordre $\leq m+2$. Des résultats plus précis seront obtenus au paragraphe suivant.

Etant donné une distribution T sur \mathbf{R}_+ , on désigne par T_a l'homothétique de T dans le rapport $a > 0$; avec la notation fonctionnelle, on a $T_a(t) = T(a^{-1}t)$. De même T^a est la distribution définie par $T^a(t) = T(t^a)$. On démontre sans difficulté la proposition suivante:

PROPOSITION 2.4. Soit $a > 0$. Si $F \in \mathcal{H}_+$ les fonctions $a^z F(z)$, $F\left(\frac{z}{a}\right)$ et $F'(z)$ appartiennent aussi à \mathcal{H}_+ . Si $T \in \mathcal{E}'_+$, les distributions T_a , T^a et $(\log t) T$ appartiennent aussi à \mathcal{E}'_+ et l'on a

$$\mathfrak{M}T_a(z) = a^z \mathfrak{M}T(z), \quad \mathfrak{M}T^a(z) = \frac{1}{a} \mathfrak{M}T\left(\frac{z}{a}\right),$$

$$\mathfrak{M}[(\log t) T](z) = \frac{d}{dz} \mathfrak{M}T(z).$$

Exemples. 1) La mesure de Dirac δ_1 au point 1 est l'unité de l'algèbre \mathcal{E}'_+ . $\mathfrak{M}\delta_1 = 1$ est l'unité de l'algèbre \mathcal{H}_+ .

2) Dans \mathcal{H}_+ , la multiplication par $-z$ est un opérateur inversible dont l'inverse est la multiplication par $-z^{-1}$. On en déduit que l'opérateur différentiel D dans \mathcal{E}'_+ admet un inverse D^{-1} qui est la convolution par $\mathfrak{N}(-z^{-1}) = -\theta$, avec $\theta(t) = 1$ si $0 < t < 1$ et $= 0$ si $t \geq 1$. En fait $D^{-1} f$ est la primitive de $t^{-1} f$ à support borné.

3) Plus généralement, $P(z) = c(z-z_1)^{n_1} \dots (z-z_k)^{n_k}$ étant un polynôme de degré $m = n_1 + \dots + n_k \geq 1$ à zéros z_1, \dots, z_k distincts, la multiplication par $P(-z)$ dans \mathcal{H}_+ est un opérateur d'inverse $P(-z)^{-1}$. Par transformation de Mellin inverse, on en déduit que l'opérateur différentiel $P(D)$ est inversible dans \mathcal{E}'_+ : $P(D)^{-1}$ est la convolution par

$$(-1)^m c^{-1} \theta_{z_1, n_1} * \dots * \theta_{z_k, n_k},$$

où $\theta_{w, n} = (-1)^{n-1} t^w (\log t)^{n-1} \theta / (n-1)!$ est la transformée de Mellin inverse de la fonction $z \mapsto (z+w)^{-n}$.

3. THÉORÈMES DU TYPE DE PALEY-WIENER

THÉORÈME 3.1. Soit $F \in \mathcal{H}_+$.

1) F est la transformée de Mellin d'une distribution à support dans $[a^{-1}, a]$ ($a \geq 1$) si et seulement si F est entière et vérifie une inégalité

$$(3.1) \quad |F(z)| \leq C(1+|z|)^m a^{|\operatorname{Re} z|}, \quad z \in \mathbf{C},$$

avec $m \in \mathbf{N}$ et $C > 0$.

2) F est la transformée de Mellin d'une fonction C^∞ à support dans $[a^{-1}, a]$ ($a > 1$) si et seulement si F est entière et, pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe $C_m > 0$ tel que

$$(3.2) \quad |\bar{F}(z)| \leq C_m(1+|z|)^{-m} a^{|\operatorname{Re} z|}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Démonstration. (Voir aussi [6], pages 3 à 13, [7], théorème 16, page 272 et [3], théorème 1.7.7, page 21).

1) Soit T une distribution sur \mathbf{R} à support dans $[a^{-1}, a]$. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que T soit d'ordre $\leq m$ et

$$(3.3) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sum_{j=0}^m \sup_t |\varphi^{(j)}(t)|$$

pour tout $\varphi \in C^m(\mathbf{R}_+)$, avec $M > 0$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$ égale à 1 au voisinage de $[a^{-1}, a]$. On a $F(z) = \langle T, t^{z-1} \chi \rangle$ et F est entière. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ nulle pour $t \geq 3$ et égale à 1 pour $t \leq 2$. Posons

$$\varphi_z(t) = \chi(t) \psi(t^{|z|} a^{-|z|}) \psi(t^{-|z|} a^{-|z|}) t^{z-1}.$$

On a $\varphi_z \in C^\infty(\mathbf{R})$, et comme $\varphi_z(t) = t^{z-1}$ au voisinage du support de T , $F(z) = \langle T, \varphi_z \rangle$. D'après (3.3), en majorant les dérivées de φ_z , on obtient (3.1).

Soit F entière vérifiant (3.1). On a $F = \mathfrak{M}T$ avec $T = \mathfrak{N}F = (-D)^{m+2} g_\pm$, où