

### 3. Théorèmes du type de Paley-Wiener

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$(-1)^m c^{-1} \theta_{z_1, n_1} * \dots * \theta_{z_k, n_k},$$

où  $\theta_{w, n} = (-1)^{n-1} t^w (\log t)^{n-1} \theta / (n-1)!$  est la transformée de Mellin inverse de la fonction  $z \mapsto (z+w)^{-n}$ .

### 3. THÉORÈMES DU TYPE DE PALEY-WIENER

THÉORÈME 3.1. Soit  $F \in \mathcal{H}_+$ .

1)  $F$  est la transformée de Mellin d'une distribution à support dans  $[a^{-1}, a]$  ( $a \geq 1$ ) si et seulement si  $F$  est entière et vérifie une inégalité

$$(3.1) \quad |F(z)| \leq C(1+|z|)^m a^{|\operatorname{Re} z|}, \quad z \in \mathbf{C},$$

avec  $m \in \mathbf{N}$  et  $C > 0$ .

2)  $F$  est la transformée de Mellin d'une fonction  $C^\infty$  à support dans  $[a^{-1}, a]$  ( $a > 1$ ) si et seulement si  $F$  est entière et, pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , il existe  $C_m > 0$  tel que

$$(3.2) \quad |\bar{F}(z)| \leq C_m(1+|z|)^{-m} a^{|\operatorname{Re} z|}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

*Démonstration.* (Voir aussi [6], pages 3 à 13, [7], théorème 16, page 272 et [3], théorème 1.7.7, page 21).

1) Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbf{R}$  à support dans  $[a^{-1}, a]$ . Il existe  $m \in \mathbf{N}$  tel que  $T$  soit d'ordre  $\leq m$  et

$$(3.3) \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sum_{j=0}^m \sup_t |\varphi^{(j)}(t)|$$

pour tout  $\varphi \in C^m(\mathbf{R}_+)$ , avec  $M > 0$ . Soit  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$  égale à 1 au voisinage de  $[a^{-1}, a]$ . On a  $F(z) = \langle T, t^{z-1} \chi \rangle$  et  $F$  est entière. Soit  $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$  nulle pour  $t \geq 3$  et égale à 1 pour  $t \leq 2$ . Posons

$$\varphi_z(t) = \chi(t) \psi(t^{|z|} a^{-|z|}) \psi(t^{-|z|} a^{-|z|}) t^{z-1}.$$

On a  $\varphi_z \in C^\infty(\mathbf{R})$ , et comme  $\varphi_z(t) = t^{z-1}$  au voisinage du support de  $T$ ,  $F(z) = \langle T, \varphi_z \rangle$ . D'après (3.3), en majorant les dérivées de  $\varphi_z$ , on obtient (3.1).

Soit  $F$  entière vérifiant (3.1). On a  $F = \mathfrak{M}T$  avec  $T = \mathfrak{N}F = (-D)^{m+2} g_\pm$ , où

$$g_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z) z^{-(m+2)} dz,$$

$\gamma(s)$  étant la droite  $\operatorname{Re} z = s$  orientée dans le sens  $\operatorname{Im} z$  croissant, avec  $\pm s > 0$ ; cela résulte de la définition de  $\mathfrak{N}$  si  $s > 0$ , et provient du fait que  $g_+ - g_-$  est un polynôme en  $\log t$  de degré  $\leq m + 1$  si  $s < 0$ . L'inégalité (3.1) entraîne

$$|g_{\pm}(t)| \leq A a^{|s|} t^{-s}$$

lorsque  $|s| > 1$ ,  $A$  constante  $> 0$ . En faisant tendre  $s$  vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  on obtient  $g_+(t) = 0$  pour  $t > a$  et  $g_-(t) = 0$  pour  $t < a^{-1}$ , de sorte que le support de  $T$  est contenu dans  $[a^{-1}, a]$ .

2) Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$  une fonction à support dans  $[a^{-1}, a]$ . Il est clair que  $F = \mathfrak{M}\varphi$  est une fonction entière et que, pour tout entier  $k \geq 0$ ,

$$|z^k F(z)| = \left| \int_{a^{-1}}^a D^k \varphi(t) t^{z-1} dt \right| \leq A_k a^{|\operatorname{Re} z|},$$

$A_k$  constante positive, d'où l'inégalité (3.2).

Inversement, si  $F$  entière vérifie (3.2) pour tout  $m \in \mathbf{N}$ , on a  $F = \mathfrak{M}\varphi$ , où  $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z) dz$  est une fonction  $C^\infty$ , à support dans  $[a^{-1}, a]$  d'après 1), c.q.f.d.

ESPACES  $\mathcal{E}$  ET  $\mathcal{H}$ . Dans la suite, nous désignerons par  $\mathcal{E}$  le sous-espace de  $L^2(\mathbf{R}_+, t^{-1} dt)$  formé des fonctions à support borné, muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{E}} = \left( \int_0^\infty |f(t)|^2 t^{-1} dt \right)^{1/2}, \quad f \in \mathcal{E}.$$

Il est clair que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'_+ \cap L^1(\mathbf{R}_+) \cap L^2(\mathbf{R}_+)$ .

Par exemple, si  $f$  est une fonction de carré intégrable à support borné telle que  $|f(t) - f(0)| \leq C t^\alpha$  lorsque  $t \rightarrow +0$ , avec  $C$  et  $\alpha > 0$ , on a  $f \in \mathcal{E}$  si et seulement si  $f(0) = 0$ .

Le théorème suivant caractérise l'espace  $\mathcal{H} = \mathfrak{M}\mathcal{E}$ :

**THÉORÈME 3.2.** *Pour qu'une fonction  $F$  soit la transformée de Mellin d'une fonction  $f \in \mathcal{E}$  à support dans  $]0, a[$  ( $a > 0$ ), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

1)  $F$  est holomorphe dans le demi-plan  $\operatorname{Re} z > 0$ ,

2) la fonction  $F_x : y \mapsto F(x+iy)$  appartient à  $L^2(\mathbf{R})$  pour tout  $x > 0$  et il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|F_x\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq C a^x, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Si les conditions précédentes sont vérifiées,  $F_x$  tend vers une limite  $F_0$  dans  $L^2(\mathbf{R})$  lorsque  $x \rightarrow +0$  et

$$(3.4) \quad \|F_x\|_{L^2(\mathbf{R})} = \sqrt{2\pi} \|t^x f\|_{\mathcal{E}} \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

*Démonstration.* (Voir aussi [6], théorème 5, page 8). Soit  $f \in \mathcal{E}$  à support contenu dans  $]0, a]$ ,  $a > 0$ . Pour  $x = \operatorname{Re} z > 0$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ , on a  $F(z) = \mathfrak{M}f(z) = \int_0^\infty f(t) t^{z-1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(s) e^{iys} ds$ , avec  $g_x(s) = f(e^s) e^{sx} = g_0(s) e^{sx}$ ,  $g_0 \in L^2(\mathbf{R})$ ,  $g_0$  nulle au voisinage de  $+\infty$ ,  $\|g_x\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|t^x f\|_{\mathcal{E}}$ ,  $x \geq 0$ . Autrement dit, la fonction  $F_x$  est la transformée de Fourier de  $g_x \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$  pour  $x > 0$ , et la formule de Plancherel donne (3.4) pour  $x > 0$ . Comme  $g_x \rightarrow g_0$  dans  $L^2(\mathbf{R})$  lorsque  $x \rightarrow +0$ ,  $F_x$  tend vers une limite  $F_0$  dans  $L^2(\mathbf{R})$ ,  $F_0$  étant la transformée de Fourier de  $g_0$ ; de plus, la formule (3.4) reste valable pour  $x = 0$ . Enfin 1) et 2) sont vérifiés, l'inégalité de 2) avec  $C = \sqrt{2\pi} \|f\|_{\mathcal{E}}$  résultant de (3.4).

Soit  $F$  une fonction vérifiant 1) et 2). En vertu du lemme 1.6, pour tout  $r > 0$ , on a  $|F(z)| \leq C(r) a^{\operatorname{Re} z}$ , pour  $\operatorname{Re} z > r$ , donc  $F \in \mathcal{H}_+$ . Soit  $f = \mathfrak{M}F \in \mathcal{E}'_+$ . Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$ , comme  $\mathfrak{M}F$  est limite dans  $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+)$  des fonctions (2.7), on a

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^\infty dt \int_{-A}^{+A} \varphi(t) t^{-x-iy} F_x(y) dy.$$

Le théorème de Fubini donne, avec  $\Phi = \mathfrak{M}\varphi$ ,

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = \int \Phi_{1-x}(-y) F_x(y) dy,$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$2\pi |\langle f, \varphi \rangle| \leq \| \Phi_{1-x} \|_{L^2(\mathbf{R})} \| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})}.$$

Finalement, compte tenu de (3.4) valable quel que soit  $x \in \mathbf{R}$  pour  $f$  remplacé par  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$ ,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq M \| t^{1-x} \varphi \|_{\mathcal{E}} a^x$$

avec  $M > 0$ . En posant  $\psi = t^{1/2-x} \varphi$  il vient

$$|\langle t^{x-1/2} f, \psi \rangle| \leq M a^x \| \psi \|_{L^2(\mathbf{R}_+)}, \quad x > 0,$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$ . Le théorème de représentation de Riesz entraîne alors que  $t^{x-1/2} f \in L^2(\mathbf{R}_+)$  et que

$$\int_0^\infty (t/a)^{2x} |f(t)|^2 t^{-1} dt \leq M^2$$

pour tout  $x > 0$ . Lorsque  $x \rightarrow \infty$ , cette inégalité implique que le support de  $f$  est contenu dans  $]0, a]$ ; si  $x \rightarrow +0$ , elle donne que  $f \in \mathcal{E}$ , c.q.f.d.

Comme application du théorème précédent, nous allons introduire des espaces qui permettront de classer les éléments de  $\mathcal{E}'_+$  en fonction de leur régularité et de leur ordre de grandeur au voisinage de l'origine.

ESPACES  $\mathcal{H}_r^s$  ET  $\mathcal{E}_r^s$ . Etant donné deux nombres réels  $r$  et  $s$ , nous désignerons par  $\mathcal{H}_r^s$  l'ensemble des fonctions  $F \in \mathcal{H}_+$  telles que  $(z+r+1)^s F(z) = G(z+r)$ , avec  $G \in \mathcal{H} = \mathfrak{M}\mathcal{E}$ ; en particulier  $\mathcal{H}_0^0 = \mathcal{H}$ . Ainsi, si  $F \in \mathcal{H}_r^s$ ,  $F(z)$  est holomorphe pour  $\text{Re } z > -r$  et l'application

$$y \mapsto (x+iy+r+1)^s F(x+iy)$$

est dans  $L^2(\mathbf{R})$  pour  $x > -r$ .

On a  $\mathcal{H}_r^s \subset \mathcal{H}_{r'}^{s'}$  si et seulement si  $r' \leq r$  et  $s' \leq s$ .

Nous poserons  $\mathcal{E}_r^s = \mathfrak{N} \mathcal{H}_r^s$  la transformée de Mellin inverse de  $\mathcal{H}_r^s$ ; en particulier  $\mathcal{E}_0^0 = \mathcal{E}$ .

Dans le cas où  $s$  est un entier, on peut caractériser  $\mathcal{E}_r^s$  directement:

PROPOSITION 3.3. Soit  $m$  un entier  $\geq 0$  et soit  $T \in \mathcal{E}'_+$ .

a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a.1)  $T \in \mathcal{E}_r^m$ .

(a.2)  $t^{-r} D^j T \in \mathcal{E}$  pour  $0 \leq j \leq m$ .

(a.3)  $t^{j-r} T^{(j)} \in \mathcal{E}$  pour  $0 \leq j \leq m$ .

b) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(b.1)  $T \in \mathcal{E}_r^{-m}$ .

$$(b.2) \quad T = t^r \sum_{j=0}^m D^j f_j \quad \text{avec } f_j \in \mathcal{E}.$$

$$(b.3) \quad T = \sum_{j=0}^m t^{r+j} h_j^{(j)} \quad \text{avec } h_j \in \mathcal{E}.$$

*Démonstration.* Compte tenu de la formule de Leibniz et de l'égalité  $\mathcal{E}_r^s = t^r \mathcal{E}_0^s$ , on peut supposer que  $r = 0$ . Les équivalences de (a.2) et (a.3) ainsi que de (b.2) et (b.3) découlent du lemme 1.1.

Soit  $F = \mathfrak{M}T$ . On a  $T \in \mathcal{E}_0^m \Leftrightarrow (z+1)^m F(z) = G(z)$  avec  $G \in \mathcal{H} \Leftrightarrow z^j F \in \mathcal{H}$  pour  $0 \leq j \leq m \Leftrightarrow D^j T \in \mathcal{E}$  pour  $0 \leq j \leq m$ .

Si  $T \in \mathcal{E}_0^{-m}$  on a  $F(z) = (z+1)^m G(z)$  avec  $G \in \mathcal{H}$ . La formule du binôme donne (b.2) avec  $f_j = (-1)^j \binom{m}{j} \mathfrak{N}G$ .

Si  $T$  vérifie (b.2) avec  $r = 0$ , on a  $F(z) = \sum_{j=0}^m (-z)^j \mathfrak{M}f_j(z) = (1+z)^m G(z)$  avec  $G(z) = \sum_{j=0}^m (-z)^j (1+z)^{-m} \mathfrak{M}f_j(z)$  donc  $G \in \mathcal{H}$  et  $T \in \mathcal{H}_0^{-m}$ , c.q.f.d.

L'appartenance à la réunion  $\mathcal{E}_{-\infty}^s$  des espaces  $\mathcal{E}_r^s$ ,  $r \in \mathbf{R}$ , caractérise la régularité d'une distribution. On vérifie en effet que localement, les éléments de  $\mathcal{E}_{-\infty}^s$  sont dans l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbf{R})$  formé des distributions  $S$  sur  $\mathbf{R}$  telles que  $(1+|x|^2)^{s/2} \hat{S}(x)$  soit de carré intégrable,  $\hat{S}$  étant la transformée de Fourier de  $S$ . Nous démontrerons le résultat suivant:

**PROPOSITION 3.4.** *Soit  $s > m + 1/2$  avec  $m \in \mathbf{N}$ , et  $r \in \mathbf{R}$ . Si  $f \in \mathcal{E}_r^s$ , on a  $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$  et*

$$f^{(j)}(t) = o(t^{r-j}) \quad \text{lorsque } t \rightarrow +0$$

pour  $0 \leq j \leq m$ .

*Démonstration.* On a  $(z+r+1)^s \mathfrak{M}f(z) = G(z+r)$  avec  $G \in \mathcal{H}$ . Par suite, pour  $x > -r$ ,

$$f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} t^{-z-j} z(z+1) \dots (z+j-1) G(z+r) (z+r+1)^{-s} dz$$

fonction continue sur  $\mathbf{R}_+$  pour  $0 \leq j \leq m$ , donc  $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$ . Comme  $G_x : y \mapsto G(x+iy)$  converge vers  $G_0$  dans  $L^2(\mathbf{R})$  lorsque  $x \rightarrow +0$ , on a aussi

$$f^{(j)}(t) = \frac{t^{r-j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy \log t} \frac{(r-iy)(r-iy-1) \dots (r-iy-j+1) G_0(y)}{(1+iy)^s} dy$$

où l'intégrale tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow +0$ , d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Par conséquent,  $f^{(j)}(t) = o(t^{r-j})$  lorsque  $t \rightarrow +0$ , c.q.f.d.

*Remarque 1.* Si  $s < m + 1/2$ ,  $\mathcal{E}_r^s$  n'est pas contenu dans  $C^m(\mathbf{R}_+)$ . Soit en effet  $f \in \mathcal{E}'_+$  tel que  $(-D)^m f$  soit la fonction égale à 1 sur  $]0, 1[$  et nulle sur  $[1, \infty[$ . Il est clair que  $t^{r+1} f$  n'appartient pas à  $C^m(\mathbf{R}_+)$  bien que  $\mathfrak{M}(t^{r+1} f)(z) = (z+r+1)^{-m-1}$  appartienne à  $\mathcal{H}_r^s$  pour  $s < m + 1/2$ .

*Remarque 2.* Si  $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$ ,  $m \geq 0$ , et si  $f^{(j)}(t) = O(t^{r-j})$  lorsque  $t \rightarrow +0$  pour  $0 \leq j \leq m$ , il est clair que  $f \in \mathcal{E}_{r'}^m$  pour tout  $r' < r$ , puisque  $f^{(j)} = t^{r'-j} h_j$  avec  $h_j \in \mathcal{E}$  (proposition 3.3). En général, on ne peut pas remplacer  $r'$  par  $r$ : une fonction  $f \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$  qui est égale à  $|\log t|^{-1/2}$  au voisinage de 0 vérifie  $f^{(j)}(t) = o(t^{-j})$  lorsque  $t \rightarrow +0$  pour  $0 \leq j \leq m$ . Cependant, quel que soit  $s \in \mathbf{R}$ ,  $f$  n'appartient pas à  $\mathcal{E}_0^s$ ; en effet,  $\mathfrak{M}f(z) - Cz^{-1/2}$  ( $C$  constante  $\neq 0$ ) est entière.

La proposition suivante donne des conditions pour qu'une fonction de classe  $C^{m-1}$  soit dans  $\mathcal{E}_r^m$ .

**PROPOSITION 3.5.** Soit  $m$  un entier  $\geq 1$ ,  $r \in \mathbf{R}$  et  $f \in C^{m-1}(\mathbf{R}_+)$  à support borné telle que  $t^{m-r} f^{(m)} = g \in \mathcal{E}$ .

a) Si  $r < 0$ , on a  $f \in \mathcal{E}_r^m$ .

b) Si  $r > m - 1$ , on a  $f \in \mathcal{E}_r^m$  si et seulement si  $f^{(j)}(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +0$  pour  $0 \leq j \leq m - 1$ .

c) Si  $0 \leq r \leq m - 1$ , on a  $f \in \mathcal{E}_r^m$  si et seulement si  $f^{(j)}(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +0$  pour  $0 \leq j < r$  et  $f^{(r)} \in \mathcal{E}$  si  $r$  entier.

*Démonstration.* Soit  $F = \mathfrak{M}f$  et  $G = \mathfrak{M}g \in \mathcal{H}$ . Par hypothèse  $\mathfrak{M}(f^{(m)})(z) = (-1)^m (z-1)(z-2) \dots (z-m) F(z-m) = G(z+r-m)$ . On a  $f \in \mathcal{E}_r^m$  si et seulement si

$$G_0(z) = (z+1)^m F(z-r) = \frac{(-1)^m (z+1)^m G(z)}{(z-r)(z-r+1) \dots (z-r+m-1)}$$

est une fonction de  $\mathcal{H}$ .

a) Si  $r < 0$ , il est clair que  $G_0 \in \mathcal{H}$  donc  $f \in \mathcal{E}_r^m$ .

b) Si  $r > m - 1$ ,  $G_0 \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $G(r-j) = 0$  pour  $0 \leq j \leq m - 1$ . Puisque  $f^{(m)} = t^{r-m} g$ , on a pour  $0 \leq j \leq m - 1$

$$\begin{aligned} f^{(j)}(t) &= \int_{\infty}^t \frac{(t-u)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} u^{r-m} g(u) du \\ &= \sum_{k=0}^{m-j-1} \frac{(-1)^{m-k-j-1}}{k!(m-k-j-1)!} t^k \int_{\infty}^t u^{r-k-j-1} g(u) du. \end{aligned}$$

Mais, si  $\alpha > 0$ ,  $\int_{\infty}^t u^{\alpha-1} g(u) du = -G(\alpha) + o(t^\alpha)$ . En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, lorsque  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\left| \int_0^t u^{\alpha-1} g(u) du \right|^2 \leq \int_0^t u^{2\alpha-1} du \int_0^t |g(u)|^2 u^{-1} du = o(t^{2\alpha}).$$

Par suite

$$(3.5) \quad f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j-1)!} G(r-j) + o(1),$$

et  $G(r-j) = 0$  si et seulement si  $f^{(j)}(t) = o(1)$ .

c) Si  $0 \leq r \leq m - 1$ ,  $G_0 \in \mathcal{H}$  si et seulement si  $G(r-j) = 0$  pour  $0 \leq j < r$  et  $z^{-1}G \in \mathcal{H}$  dans le cas où  $r$  est entier. Comme précédemment l'égalité (3.5) est valable pour  $0 \leq j < r$ . On a donc  $G(r-j) = 0$  si et seulement si  $f^{(j)}(t) = o(1)$ , avec  $0 \leq j < r$ .

Dans le cas où  $r$  est entier,  $f \in \mathcal{E}_r^m$  entraîne  $f^{(r)} \in \mathcal{E}$ . Inversement, si  $f^{(r)} = h \in \mathcal{E}$  et si  $f^{(j)}(t) = o(1)$  pour  $0 \leq j < r$  avec  $r \geq 1$ ,

$$f(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} h(u) du = t^r h_0(t)$$

où

$$h_0(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-s)^{r-1} h(st) ds$$

appartient à  $\mathcal{E}$ . Il s'ensuit que  $F(z-r) = \mathfrak{M}h_0(z)$  est dans  $\mathcal{H}$  donc aussi  $G_0$ , c.q.f.d.

PROPOSITION 3.6. 1) L'intersection des espaces  $\mathcal{E}_r^s$ ,  $r, s \in \mathbf{R}$ , est égale à l'ensemble  $C_0^\infty$  des fonctions  $C^\infty$  sur  $[0, \infty[$ , à support borné, plates en 0.



2)  $\mathcal{E}'_+$  est égal à la réunion des espaces  $\mathcal{E}_r^s$ ,  $r, s \in \mathbf{R}$ .

*Démonstration.* 1) Si  $f \in \mathcal{E}_m^{m+1}$  avec  $m \in \mathbf{N}$ , la proposition 3.4 montre que  $f$  est de classe  $C^m$  sur  $[0, \infty[$  et que  $f^{(j)}(0) = 0$  pour  $0 \leq j \leq m$ ; il suffit de prendre  $m$  arbitrairement grand pour obtenir  $f \in C_0^\infty$ .

Si  $f \in C_0^\infty$ , la proposition 3.5 montre que  $f \in \mathcal{E}_r^m$  quels que soient  $m \in \mathbf{N}$  et  $r \in \mathbf{R}$ .

2) Si  $T \in \mathcal{E}'_+$ , la proposition 1.5 entraîne que  $T = D^m(t^{-q}g)$  avec  $m, q \in \mathbf{N}$  et  $g \in C_+^0$ . Or  $f = tg \in \mathcal{E}$  et  $T = D^m(t^{-(q+1)}f)$  appartient à  $\mathcal{E}_{-(q+1)}^{-m}$  en raison de la proposition 3.3 et de la formule de Leibniz.

#### 4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE AU VOISINAGE DE L'ORIGINE

Soit  $\mathcal{E}_r^{-\infty}$  la réunion des espaces  $\mathcal{E}_r^s$ ,  $s \in \mathbf{R}$ . On peut considérer que l'appartenance à  $\mathcal{E}_r^{-\infty}$  caractérise l'ordre de grandeur d'une distribution au voisinage de l'origine. En effet, le théorème 3.1 montre que cette appartenance est une propriété du germe à l'origine; d'autre part, l'égalité  $\mathcal{E}_r^{-\infty} = t^r \mathcal{E}_0^{-\infty}$  qui résulte de (2.9) et les propositions 3.4 et 3.5 montrent que la propriété  $T \in \mathcal{E}_r^{-\infty}$  est voisine des propriétés  $T = o(t^r)$  ou  $T = O(t^r)$  lorsque  $t \rightarrow +0$ .

*Exemples.* Soit  $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$  une fonction à support borné égale à 1 au voisinage de 0. Posons  $X = \mathfrak{M}\chi$ . On a  $X(z) = z^{-1}\Phi(z)$ , où  $\Phi = -\mathfrak{M}(D\chi)$  est la transformée de Mellin d'une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$  (voir le théorème 3.1 pour les propriétés de  $\Phi$ ) et  $\Phi(0) = 1$ . Pour  $p \in \mathbf{C}$  et  $k \in \mathbf{N}$  posons

$$(4.1) \quad \chi_{p,k}(t) = t^p (\log t)^k \chi(t).$$

On a  $X_{p,k}(z) = \mathfrak{M}\chi_{p,k}(z) = X^{(k)}(z+p)$ , fonction méromorphe de  $z$  avec un pôle d'ordre  $k+1$  en  $-p$ , de partie principale  $(-1)^k k! (z+p)^{-(k+1)}$ . De plus, si le support de  $\chi$  est contenu dans  $]0, a]$ , quel que soit  $m \in \mathbf{N}$ ,

$$(4.2) \quad (1+|z|)^m (z+p)^{k+1} X_{p,k}(z) a^{-\operatorname{Re} z} \text{ est borné pour } \operatorname{Re} z \geq -m.$$

Etant donné  $s$  réel, on a  $\chi_{p,k} \in \mathcal{E}_r^s$  si et seulement si  $\operatorname{Re} p > r$ .