BEISPIEL EINER PERIODISCHEN INSTABILEN HOLOMORPHEN STRÖMUNG

Autor(en): **Müller, Thomas**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-50385

BEISPIEL EINER PERIODISCHEN INSTABILEN HOLOMORPHEN STRÖMUNG

von Thomas MÜLLER

0. EINLEITUNG

A. Haefliger stellte die Frage, ob eine differenzierbare Blätterung auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit, bei welcher alle Blätter kompakt sind, stabil ist (eine Blätterung eines Raumes X induziert die folgende Äquivalenzrelation: Zwei Punkte, welche auf dem gleichen Blatt liegen, sind äquivalent zueinander. Ist der Quotient von X nach dieser Äquivalenzrelation hausdorffsch, so heisst die Blätterung stabil. Sind bei der Blätterung alle Blätter kompakt, so ist dies zur folgenden Bedingung äquivalent: Jedes Blatt besitzt ein Umgebungsfundamentalsystem aus saturierten Umgebungen. Eine saturierte Umgebung U soll definitionsgemäss zu jedem Punkt $x \in U$ das ganze Blatt $B(x)$ durch diesen Punkt enthalten). D. B. A. Epstein konnte in [4] zeigen, dass bei einer periodischen differenzierbaren Strömung auf einer 3-dimensionalen kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit alle Bahnen stabil sind. Der Satz konnte in [2] von R. Edwards, K. Millett und D. Sullivan und auch von E. Vogt in [10] auf 2-codimensionale differenzierbare Blätterungen verallgemeinert werden. Bald zeigte sich auch, dass eine Verallgemeinerung auf höhere Codimensionen nicht möglich ist. Denn zuerst fanden Sullivan und Thurston (siehe [9]) ein 4-codimensionales — und schliesslich Epstein und Vogt (siehe [3]) ein 3-codimensionales Gegenbeispiel zur Frage von Haefliger. Die Gegenbeispiele liessen sich sogar reellanalytisch kontruieren.

Für komplexe Räume schienen die Verhältnisse völlig anders. H. Holmann konnte in [5] den folgenden Satz beweisen:

Eine holomorphe Strömung (Operation der additiven Gruppe **C** der komplexen Zahlen) auf dem kompakten komplexen Raum X, bei der alle Bahnen kompakt sind (eindimensionale komplexe Tori), ist stabil. Dieser Satz kann als Analogen zum Satz von Epstein angesehen werden, ohne jedoch Einschränkungen bezüglich der Codimension der Blätterung zu enthalten. Weiterhin konnte Holmann in [6] und B. Kaup in [7] zeigen, dass eine 1-codimensionale kompakte holomorphe Blätterung eines komplexen Raumes X immer stabil ist. Insbesondere muss X also nicht kompakt sein. Beispiele von instabilen kompakten holomorphen Blätterungen waren selbst im Fall von nicht kompakten komplexen Räumen bisher unbekannt.

In der vorliegenden Arbeit wird eine instabile periodische holomorphe Strömung auf einer nicht kompakten 3-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit konstruiert. Alle Bahnen sind eindimensionale Tori der Form

$$T : \mathbf{C} / G \text{ mit } G : = \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$

Lässt man in diesem Beispiel jeweils die Imaginärteile weg, so erhält man die von Epstein in [4] beschriebene reelle instabile periodische Strömung auf einer nicht-kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

1. Beschreibung des Beispiels

Die additive Gruppe $G : = \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$ operiere wie folgt auf den beiden Räumen $\mathbf{C}^3$ und $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^* : = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3, z_3 \neq 0 \}$:

$$\Phi : G \times \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3, \qquad (g : z_1, z_2, z_3) \to (z_1, z_2 + g, z_3)$$

$$\Psi : G \times \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*, \quad (g : z_1, z_2, z_3) \to \left(z_1 + g, z_2 + \frac{g}{z_3}, z_3 \right)$$

Seien $g_1, g_2 \in G$. Dann bezeichnen Φ_{g_1} und Ψ_{g_2} die von g_1 bzw. g_2 durch Φ bzw. Ψ induzierten Automorphismen von $\mathbf{C}^3$ bzw. $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*$. Auf $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*$ operiert die Automorphismengruppe $H : = \{ \Phi_{g_1} \circ \Psi_{g_2}; g_1, g_2 \in G \}$ eigentlich diskontinuierlich und sogar frei. Der Quotient $(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*)/H = : X_1$ ist somit eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei

$$F_2 : = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3, \ 0 < \operatorname{Re}(z_1) < 1, 0 < \operatorname{Im}(z_1) < 1 \},$$
$$F_0 : = \{ (z_1, z_2, z_3) \in F_2, \ z_3 \neq 0 \}.$$

Die Automorphismengruppe $G_\Phi : = \{ \Phi_g, g \in G \}$ operiert eigentlich diskontinuierlich und sogar frei auf F_2 und F_0. Die Quotienten $F_2/G_\Phi = : X_2$ und $F_0/G_\Phi = : X_0$ sind somit komplexe Mannigfaltigkeiten. Wegen $\Psi_g(F_0) \cap F_0 = \phi$ für alle $g \neq 0$ kann $F_0/G_\Phi = X_0$ als offene Teilmenge von X_1 aufgefasst werden. X_0 ist offen in X_1 und in X_2 und gleich dem Durchschnitt $X_1 \cap X_2$.

Wir können nun den Raum X, auf welchem wir die gesuchte Strömung konstruieren werden, definieren:

$$X: = X_1 \cup X_2 .$$

X ist hausdorffsch, denn die Punkte aus $X_1 - X_2$ und $X_2 - X_1$ lassen sich schon allein wegen der unterschiedlichen z_3-Koordinate der Repräsentanten trennen. Somit ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Man kann X als Quotient von $\tilde{X} : = (\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*) \cup F_2$ auffassen. Die Strömung

$$\tilde{\varphi}: \mathbf{C} \times \tilde{X} \to \tilde{X}\,, \quad (z: z_1, z_2, z_3): = (z_1 + z_3 z, z_2 + z, z_3)$$

induziert auf dem Quotienten X die gesuchte holomorphe Strömung

$$\varphi: \mathbf{C} \times X \to X\,, \quad (z: [z_1, z_2, z_3]): = [\tilde{\varphi}(z: z_1, z_2, z_3)]\,.$$

Für $z_3 = 0$ und $g \in G \subset \mathbf{C}$ haben wir:

$$\varphi\,(g: [z_1, z_2, z_3]) = [z_1, z_2 + g, z_3] = [z_1, z_2, z_3]$$

Für $z_3 \neq 0$ und $g \in G \subset \mathbf{C}$ haben wir:

$$\varphi\left(\frac{g}{z_3}: [z_1, z_2, z_3]\right) = \left[z_1 + g, z_2 + \frac{g}{z_3}, z_3\right] = [z_1, z_2, z_3]\,.$$

Die Bahnen sind somit biholomorph äquivalente eindimensionale komplexe Tori. Man sieht leicht, dass die Strömung auf $X_2 - X_1$ instabil ist.

Auf $X_1 = (\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*)/H$ definiert

$$\varphi^* : (\mathbf{C}/G) \times X_1 \to X_1\,,$$

$$\varphi^*([z]: [z_1, z_2, z_3]): = \varphi\left(\frac{z}{z_3}: [z_1, z_2, z_3]\right)$$

eine freie und eigentliche Operation der Torusgruppe $T: = \mathbf{C}/G$ mit gleichen Bahnen wie bei der Operation φ . X_1 ist somit ein Torusbündel über X_1/T. Die Tori des Bündels sind gerade die Bahnen der Strömung $\varphi \mid \mathbf{C} \times X_1 \to X_1$. Auf $X_2 - X_1$ lässt sich das von φ^* definierte Torusbündel nicht fortsetzen, wohl aber die Strömung $\varphi \mid \mathbf{C} \times X_1 \to X_1$.

Globale Funktionen auf X dürfen nur von z_3 abhängen. X ist also nicht holomorph konvex.

LITERATUR

[1] Cartan, H. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. *Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in honor of S. Lefschetz.* Princeton University Press, pp. 90-102 (1957).

[2] Edwards, R., K. Millett and D. Sullivan. Foliations with all leaves compact. *Publ. I.H.E.S.*, June 1975.

[3] Epstein, D. B. A. and E. Vogt. A counterexample to the Periodic Orbit Conjecture in codimension 3. *Ann. of Math. 108* (1978), pp. 539-552.

[4] Epstein, D. B. A. Periodic flows on threemanifolds. *Ann. of Math. 95* (1972), pp. 66-82.

[5] Holmann, H. Analytische periodische Strömungen auf kompakten komplexen Räumen. *Comment. Math. Helvetici 52* (1977), pp. 251-257.

[6] —— On the stability of holomorphic foliations with all leaves compact. Variétés Analytiques Compactes, Colloque, Nice 1977. *Lecture Notes in Mathematics 683*, pp. 217-248.

[7] Kaup, B. Ein geometrisches Endlichkeitskriterium für Untergruppen von Aut (**C**, 0) und holomorphe 1-codimensionale Blätterungen. *Comment. Math. Helvetici 53* (1978), pp. 295-299.

[8] Sullivan, D. A new flow. *Bull. Am. Math. Soc. 82* (1976), pp. 331-332.

[9] —— A counterexample to the Periodic Orbit Conjecture. *Publ. I.H.E.S. No. 46* (1976).

[10] Vogt, E. Foliations of codimension 2 with all leaves compact. *Manuscripta math. 18* (1976), pp. 187-212.

(Reçu le 28 mai 1979)

Thomas Müller

Mathematisches Institut der Universität
CH 1700 Fribourg