

# SUR LES OUVERTS AFFINES D'UN SCHÉMA AFFINE

Autor(en): **Arezzo, Domenico / Ramella, Luciana**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-50386>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES OUVERTS AFFINES D'UN SCHÉMA AFFINE <sup>1)</sup>

par Domenico AREZZO et Luciana RAMELLA

M. Nagata, dans [8], a démontré que si  $X$  est une variété affine et  $F$  est un fermé de  $X$  localement principal, alors  $X - F$  est affine, et il a donné un exemple de variété (normale de dimension 3) ayant un fermé irréductible de codimension 1 dont le complémentaire n'est pas affine.

En utilisant des méthodes cohomologiques, R. Hartshorne a étendu le résultat de M. Nagata aux schémas affines  $X$  (cfr. [7]).

Dans [2], M. Beltrametti et F. Odetti prouvent que si  $X$  est localement semi-factoriel,  $X - F$  est un ouvert affine si et seulement si  $F$  a la codimension pure 1.

Dans la première section de ce travail, nous reprenons le concept de transformé d'un idéal, introduit et utilisé par M. Nagata dans [8], et nous étudions ses propriétés géométriques; en particulier, nous l'employons pour exprimer une caractérisation de la propriété  $S_2$  (prop. 1.7).

En utilisant cette caractérisation et en étendant aux schémas affines les propriétés du transformé démontrées par M. Nagata pour les variétés sur un corps (prop. 2.5), nous retrouvons la condition suffisante de R. Hartshorne, et nous prouvons, dans l'hypothèse que la normalisation  $X^*$  de  $X$  soit un schéma noethérien, que le complémentaire d'un ouvert affine est nécessairement pur de codimension 1 (prop. 2.11.).

Dans la dernière section, nous étudions les anneaux intègres ayant la propriété que tout idéal premier de hauteur 1 soit le radical d'un idéal principal (propriété  $(\beta)$ ) et caractérisons les ouverts affines d'un schéma affine à normalisé noethérien et ayant localement la propriété  $(\beta)$  comme les complémentaires des fermés de codimension pure 1 (prop. 3.9.).

Ce résultat généralise le résultat de M. Beltrametti et F. Odetti; la prop. 3.10. permet en effet de construire une classe d'exemples d'anneaux intègres ayant la propriété  $(\beta)$  mais non la propriété  $S_2$ , et donc aussi une

---

<sup>1)</sup> Travail exécuté dans la sphère d'activité de la section n° 3 du Group National Structures Algébriques et Géométriques et leurs applications du C.N.R.

classe d'exemples d'anneaux ayant localement la propriété  $(\beta)$  mais non intégralement clos.

Dans tout le travail, nous noterons par  $D$  un anneau commutatif à élément unité intègre et par  $K$  son corps des fractions.

### 1. GÉNÉRALITÉS SUR LE TRANSFORMÉ D'UN IDÉAL

Dans cette section nous rappelons la définition et les principales propriétés du transformé d'un idéal  $\mathfrak{a}$  de  $D$ , que nous utiliserons par la suite; pour des indications plus complètes sur les propriétés du transformé, voir [4], [9] ou [10].

**DÉFINITION 1.1.** Le transformé d'un idéal  $\mathfrak{a}$  de  $D$  est l'overring de  $D$ <sup>1)</sup> défini par

$$T(\mathfrak{a}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (D : \mathfrak{a}^n) = \{ x \in K \mid \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ avec } x\mathfrak{a}^n \subseteq D \}.$$

**PROPOSITION 1.2.** On a les faits suivants :

- a)  $T((a)) = D_a$  si  $a \neq 0$  (en particulier  $T(D) = D$ );  $T((0)) = K$ .
- b) Si il existe  $n \in \mathbb{N}$  avec  $\mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{b}$ ,  $T(\mathfrak{a}) \supseteq T(\mathfrak{b})$ .
- c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a}^n)$ .
- d) Si  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  est de type fini,  $T(\mathfrak{a}) = T(\sqrt{\mathfrak{a}})$ .
- e) Si  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  est de type fini et si il existe  $c \in D$  avec  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(c)}$ , alors  $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$ .
- f)  $T(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = T(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \supseteq T(\mathfrak{a}) + T(\mathfrak{b}) \supseteq T(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = T(\mathfrak{a}) \cap T(\mathfrak{b})$ .
- g) Si  $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $T(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^n D_{a_i}$ .
- h) Si  $T(\mathfrak{b}) = D$  ou  $T(\mathfrak{b}) = K$ ,  $T(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = T(\mathfrak{a}) + T(\mathfrak{b})$ .

*Preuve.* Chaque affirmation est conséquence immédiate de la définition et des affirmations précédents.

**THÉORÈME 1.3.** Soient  $\mathfrak{a}$  un idéal et  $D'$  un overring de  $D$  avec  $D \subseteq D' \subseteq T(\mathfrak{a})$ . Alors l'application canonique  $\text{Spec } D' \rightarrow \text{Spec } D$  induit un

<sup>1)</sup> Un overring de  $D$  est un anneau contenant  $D$  et contenu dans  $K$ .

isomorphisme  $\varphi$  (pour la relation d'inclusion) de l'ensemble des idéaux premiers de  $D'$  ne contenant pas  $\alpha D'$  sur l'ensemble des idéaux premiers de  $D$  ne contenant pas  $\alpha$ . En outre, si  $\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{p}')$ , on a  $D'_{\mathfrak{p}'} = D_{\mathfrak{p}}$ .

*Preuve.* Cfr. [8] ou [9].

PROPOSITION 1.4. Soit  $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$  la famille des idéaux premiers de  $D$  ne contenant pas  $\alpha$ . Alors  $T(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha} D_{\mathfrak{p}_\alpha}$ ; en outre, si  $\alpha$  est de type fini, on a l'égalité.

*Preuve.* Si  $\mathfrak{p} \not\supseteq \alpha$ , soit  $x \in \alpha$  et  $x \notin \mathfrak{p}$ ; on a alors  $T(\alpha) \subseteq T((x)) = D_x \subseteq D_{\mathfrak{p}}$ , d'où la première affirmation. La seconde est évident si  $\alpha$  est principal et ainsi elle découle de la prop. 1.2. g).

REMARQUE 1.5. Si l'idéal  $\alpha$  n'est pas de type fini, on peut avoir  $T(\alpha) \neq \bigcap_{\alpha} D_{\mathfrak{p}}$ ; soit pour exemple  $V$  un anneau de valuation non discrète de rang 1 du type  $V = k + \mathfrak{m}$  avec  $k$  corps et  $\mathfrak{m}$  idéal maximal de  $V$ ; soit en outre  $D = F + \mathfrak{m}$  où  $F$  est un sous-corps propre de  $k$ . On a alors  $T(\mathfrak{m}) = V$  (cfr. [1], cor. 3.8.), qui ne peut pas être intersection de localisations de  $D$ , les uniques localisations de  $D$  étant  $D$  et  $K$ .

La proposition suivante permet une interprétation géométrique du transformé d'un idéal.

PROPOSITION 1.6. Soient  $\alpha$  un idéal de type fini de  $D$ ,  $X = \text{Spec } D$  et  $U$  l'ouvert de  $X$  défini par  $\alpha$ . Alors  $T(\alpha) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ .

*Preuve.* Comme  $D$  est intègre, on a  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \not\supseteq \alpha} D_{\mathfrak{p}}$  (cfr. [5], I.8.5.1.); la proposition résulte donc de la prop. 1.4.

Une autre propriété géométrique du transformé est exprimée par la

PROPOSITION 1.7. Si  $D$  est noethérien, alors  $T(\alpha) = D$  pour tout idéal  $\alpha$  de hauteur  $\geq 2$  si et seulement si  $D$  a la propriété  $S_2$ .

*Preuve.* Si pour tout idéal  $\alpha$  de hauteur  $\geq 2$  on a  $T(\alpha) = D$ , l'homomorphisme  $D = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = T(\alpha)$ , où  $X = \text{Spec } D$  et  $U$

est l'ouvert de  $X$  défini par  $\alpha$ , est bijectif, c'est-à-dire  $D$  a la propriété  $S_2$  (cfr. [6], 21.13.4.). Réciproquement, si  $D$  a la propriété  $S_2$  et  $h(\alpha) \geq 2$ , on a  $T(\alpha) \subseteq \bigcap_{h(p)=1} D_p = D$ .

## 2. SUR LA CONDITION $\alpha T(\alpha) = T(\alpha)$

Dans cette section on étudie la condition  $\alpha T(\alpha) = T(\alpha)$ . En particulier, on prouve que pour les idéaux de type fini elle est une propriété locale (prop. 2.3.) et que les idéaux qui la vérifient sont exactement ceux qui définissent dans  $X = \text{Spec } D$  les ouverts affines (théor. 2.6.), ce qui met en évidence l'aspect géométrique de la condition même. On retrouve ainsi, comme corollaire, le fait bien connu que les ouverts d'une courbe affine sont tous affines (rém. 2.9.). La section termine avec la démonstration que, si la clôture intégrale  $D^*$  de  $D$  est noethérienne, la condition  $\alpha T(\alpha) = T(\alpha)$  peut être vérifiée seulement par les idéaux pseudopurs<sup>1)</sup> de hauteur 1 (prop. 2.11).

Rappelons d'abord un résultat dû à M. Nagata (cfr. [9]).

LEMME 2.1. *Soient  $\alpha$  un idéal de type fini et  $J$  un overring plat de  $D$ . Alors on a  $T(\alpha J) = T(\alpha) J$ .*

REMARQUE 2.2. R. Gilmer et J. Huckaba, dans [4], ont montré avec un exemple que l'hypothèse que l'idéal  $\alpha$  soit de type fini est essentiel dans le lemme 2.1.

PROPOSITION 2.3. *Si  $\alpha$  est un idéal de type fini de  $D$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a)  $\alpha T(\alpha) = T(\alpha)$ ;
- b)  $\alpha T(\alpha J) = T(\alpha J)$  pour tout overring plat  $J$  de  $D$ ;
- c)  $\alpha T(\alpha D_m) = T(\alpha D_m)$  pour tout idéal maximal  $m$  de  $D$ .

<sup>1)</sup> Un idéal  $\alpha$  est dit *pseudopur* si les idéaux premiers minimaux de  $\alpha$  ont tous la même hauteur.

*Preuve.* Il résulte du lemme 2.1. que a)  $\Rightarrow$  b), et l'implication b)  $\Rightarrow$  c) est évidente. Pour prouver que c) entraîne a), rappelons que si  $F$  est un sous- $D$ -module de  $K$  on a  $F = \bigcap F_{\mathfrak{m}}$  où l'intersection est étendue à tous les idéaux maximaux de  $D$ , et que  $F_{\mathfrak{m}} = FD_{\mathfrak{m}}$ ; on a donc

$$\begin{aligned} T(\mathfrak{a}) &= \bigcap T(\mathfrak{a}) D_{\mathfrak{m}} = \bigcap T(\mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}}) = \bigcap \mathfrak{a}T(\mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}}) \\ &= \bigcap \mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) D_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

**COROLLAIRE 2.4.** *Si  $D$  est noethérien et  $\mathfrak{a}$  est un idéal de  $D$  tel que, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $D$ ,  $\sqrt{\mathfrak{a}} D_{\mathfrak{m}}$  est le radical d'un idéal principal, alors  $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$ .*

*Preuve.* En effet, il résulte de la prop. 1.2. e) que la condition c) de la prop. 2.3. est vérifiée.

**PROPOSITION 2.5.** *Soient  $\mathfrak{a}$  un idéal et  $D'$  un overring noethérien de  $D$  contenu dans  $T(\mathfrak{a})$ . Soient en outre  $X = \text{Spec } D$ ,  $X' = \text{Spec } D'$ ,  $U$  l'ouvert de  $X$  défini par  $\mathfrak{a}$  et  $U'$  l'ouvert de  $X'$  défini par  $\mathfrak{a}D'$ . On a alors un isomorphisme canonique entre  $(U', \mathcal{O}_{X'|U'})$  et  $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ .*

*Preuve.* L'immersion  $D \hookrightarrow D'$  induit un morphisme canonique de schémas  $(f, \theta): (X', \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ . D'après le théorème 1.3., la restriction de  $f$  à  $U'$  est une bijection entre  $U'$  et  $U$ , donc, pour prouver que  $f$  est un homéomorphisme entre  $U'$  et  $U$ , montrons que si  $V$  est une partie fermée de  $U'$ ,  $f(V)$  est une partie fermée de  $U$ . On peut supposer que  $V$  soit irréductible et définie par un élément de  $U'$ ; en effet, si  $V = V(\mathfrak{b}) \cap U'$ , avec  $\mathfrak{b}$  idéal de  $D'$  et si  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  sont les idéaux premiers minimaux de  $\mathfrak{b}$ , on a

$$V = \bigcup_{i=1}^n (V(\mathfrak{p}_i) \cap U')$$

et en outre  $V(\mathfrak{p}_i) \cap U' \neq \emptyset$  si et seulement si  $\mathfrak{p}_i \in U'$ .

Soit donc  $V = \{ \mathfrak{p}' \in U' \mid \mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{q}' \}$  avec  $\mathfrak{q}' \in U'$  et prouvons que  $f(V) = \{ \mathfrak{p} \in U \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}' \cap D \}$ .

Soit  $\mathfrak{p} \in U$  tel que  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}' \cap D$ ; il existe  $\mathfrak{p}' \in U'$  tel que  $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}' \cap D$  et d'après le théorème 1.3. on a  $D'_{\mathfrak{p}'} = D_{\mathfrak{p}} \subseteq D'_{\mathfrak{q}' \cap D} = D'_{\mathfrak{q}'}$ ; il en résulte que  $\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{q}'$ , donc  $\mathfrak{p} \in f(V)$ . L'autre inclusion est évidente. La conclusion résulte alors de [5] I.4.2.

**THÉORÈME 2.6.** *Soient  $D$  un anneau intègre noethérien,  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $D$  et  $U$  l'ouvert de  $X = \text{Spec } D$  défini par  $\mathfrak{a}$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$ .
- b) *Le schéma  $(U, \mathcal{O}_{X|U})$  est affine.*
- c) *Il y a un isomorphisme canonique entre les schémas  $(U, \mathcal{O}_{X|U})$  et  $(\text{Spec } T(\mathfrak{a}), T(\mathfrak{a})^\sim)$ .*

*Preuve.* Si  $1 \in T(\mathfrak{a})$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \in \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-n}$ , où  $\mathfrak{a}^{-n} = \{x \in K \mid x\mathfrak{a}^n \subseteq D\}$ ; alors, dit  $D' = D[\mathfrak{a}^{-n}]$ , on a  $\mathfrak{a}D' = D'$  et  $D'$  est un overring noethérien de  $D$  contenu dans  $T(\mathfrak{a})$ ; donc, d'après la prop. 2.5.

on a  $(U, \mathcal{O}_{X|U}) \cong (\text{Spec } D', \tilde{D}')$ . Cela prouve que a)  $\Rightarrow$  b). Le fait que b)  $\Rightarrow$  c) résulte de la prop. 1.6. Enfin, si c) est vrai,  $T(\mathfrak{a})$  est noethérien,  $\text{Spec } T(\mathfrak{a})$  étant un sous-schéma du schéma noethérien  $\text{Spec } D$ ; on a donc, d'après la prop. 2.4., un homéomorphisme canonique entre  $\text{Spec } T(\mathfrak{a})$  et l'ouvert de  $\text{Spec } T(\mathfrak{a})$  défini par  $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a})$ ; mais ceci prouve que la partie fermée de  $\text{Spec } T(\mathfrak{a})$  défini par  $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a})$  est vide et on en conclut que l'on a  $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$ .

**REMARQUE 2.7.** L'hypothèse que  $D$  soit noethérien est essentiel dans le théorème 2.6. En effet, si  $D$  est un anneau de valuation non discrète de rang 2 dont l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  est tel que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ ,  $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$  est la chaîne de ses idéaux premiers et  $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$ , l'ouvert  $\text{Spec } D - V(\mathfrak{m}) = \text{Spec } D_f$  est affine, même si l'on a  $T(\mathfrak{m}) = D$  (puisque  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ ) et donc  $\mathfrak{m}T(\mathfrak{m}) \neq T(\mathfrak{m})$ .

**COROLLAIRE 2.8.** *Supposons  $D$  noethérien et soit  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $D$  tel que est localement radical d'idéaux principaux. Alors l'ouvert  $U_{\mathfrak{a}}$  de  $X = \text{Spec } D$  défini par  $\mathfrak{a}$  est affine.*

*Preuve.* Cela résulte aussitôt du coroll. 2.4. et du théor. 2.6.

**REMARQUE 2.9.** La condition suffisante du corollaire 2.8. étant vérifiée pour tout idéal si  $\dim D = 1$ , on retrouve le fait bien connu que les ouverts des courbes affines sont tous affines.

REMARQUE 2.10. Le corollaire 2.8. avait déjà été démontré par R. Hartshorne dans [7], en utilisant des méthodes de cohomologie locale.

Nous donnons maintenant une condition nécessaire pour que un idéal d'un anneau  $D$  à clôture intégrale noethérienne définisse dans  $\text{Spec } D$  un ouvert affine.

PROPOSITION 2.11. Soient  $D$  un anneau intègre noethérien dont la clôture intégrale est aussi noethérienne et  $\alpha$  un idéal de  $D$  tel que  $\alpha T(\alpha) = T(\alpha)$ . Alors  $\alpha$  est pseudopur de hauteur 1.

*Preuve.* Supposons d'abord que  $D$  soit intégralement clos. Soient  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  les idéaux premiers minimaux de  $\alpha$  et supposons qu'on ait  $h(\mathfrak{p}_1) \geq 2$ . Soit  $f \in \bigcap_{i=2}^n \mathfrak{p}_i$ ,  $f \notin \mathfrak{p}_1$  (si  $n=1$ ,  $f=1$ ); on a alors  $T(\alpha D_f) = T(\sqrt{\alpha} D_f) = T(\mathfrak{p}_1 D_f)$  et  $h(\alpha D_f) \geq 2$ ; donc, d'après la proposition 1.7.,  $T(\alpha D_f) = D_f$  et alors  $\alpha T(\alpha D_f) \neq T(\alpha D_f)$ , en contradiction avec la proposition 2.3.

Dans le cas général, soient  $D^*$  la clôture intégrale de  $D$  et  $\varphi: \text{Spec } D^* \rightarrow \text{Spec } D$  le morphisme canonique. Comme  $\alpha T(\alpha) = T(\alpha)$ , l'ouvert  $U = \text{Spec } D - V(\alpha)$  est affine (théor. 2.6.) et ainsi, comme  $\varphi$  est un morphisme affine, l'ouvert  $U^* = \text{Spec } D^* - V(\alpha D^*) = \varphi^{-1}(U)$  est affine dans  $\text{Spec } D^*$  il s'ensuit que  $\alpha D^*$  est pseudopur de hauteur 1,  $D^*$  étant noethérien et intégralement clos. Soit maintenant  $\mathfrak{p}$  un idéal premier minimal de  $\alpha$ ; comme les idéaux premiers de  $D^*$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$  sont premiers minimaux de  $\alpha D^*$  et ceux-ci ont tous hauteur 1,  $\mathfrak{p}$  a hauteur 1.

REMARQUE 2.12. Il résulte de la prop. 2.11. et du théor. 2.6. que si  $D$  est un anneau noethérien dont la clôture intégrale est aussi noethérienne, les idéaux de hauteur  $\geq 2$  ne peuvent pas définir des ouverts affines dans  $\text{Spec } D$ . Si l'anneau  $(D, \mathfrak{m})$  est locale de dimension  $\geq 2$ ,  $\text{Spec } D - \{\mathfrak{m}\}$  ne peut pas être affine. En effet, si  $D$  est intégralement clos, d'après la prop. 1.7. on a  $T(\mathfrak{m}) = D$  et ainsi  $\mathfrak{m}T(\mathfrak{m}) \neq T(\mathfrak{m})$ . Dans le cas général, soient  $D^*$  la clôture intégrale de  $D$  et  $\varphi: \text{Spec } D^* \rightarrow \text{Spec } D$  le morphisme affine canonique; alors, si  $\text{Spec } D - \{\mathfrak{m}\}$  est affine, il en est de même de  $\text{Spec } D^* - V(\mathfrak{m}D^*) = \varphi^{-1}(\text{Spec } D - \{\mathfrak{m}\})$ , ce qui est absurde.



### 3. PROPRIÉTÉ $(\beta)$ ET OUVERTS AFFINES

Dans cette section nous démontrons une condition suffisante pour caractériser les ouverts affines d'un schéma affine noethérien  $X$  comme les complémentaires des parties fermées de codimension pure 1.  $(\beta)$  désignant la propriété que tout idéal premier de hauteur 1 soit le radical d'un idéal principal, la condition est que l'anneau intègre  $D$  ait localement la propriété  $(\beta)$ . Cette dernière hypothèse coïncide avec la semi-factorialité locale si  $D$  est un anneau de Krull (prop. 3.4.), mais elle est en général plus faible, comme le montre la remarque 3.11., qui donne un exemple d'une classe d'anneaux ayant la propriété  $(\beta)$  mais non la propriété  $S_2$ . Le travail se termine par un exemple d'un anneau ayant les propriétés  $(\beta)$  et  $S_2$ , mais non intégralement clos (ex. 3.12).

**DÉFINITION 3.1.** On dit que  $D$  a la propriété  $(\alpha)$  (respect.  $(\beta)$ ) si tout idéal premier de hauteur 1 de  $D$  a une puissance symbolique principale (respect. est le radical d'un idéal principal).

Si  $D$  est un anneau de Krull, la propriété  $(\alpha)$  coïncide avec la semi-factorialité; si  $D$  est noethérien, la propriété  $(\beta)$  coïncide avec la propriété  $C_2FD$  étudié par E. Stagnaro dans [11].

**REMARQUE 3.2.** Si  $D$  a un seul idéal premier de hauteur 1  $\mathfrak{p}$ , par exemple si  $D$  est un anneau de valuation ou un anneau intègre quasi-local de dimension 1, et si  $0 \neq x \in \mathfrak{p}$ , on a  $\sqrt{(x)} = \mathfrak{p}$ , et ainsi  $D$  a la propriété  $(\beta)$ .

**LEMME 3.3.** Si  $D$  est noethérien,  $D$  a la propriété  $(\beta)$  si et seulement si le radical de tout idéal pseudopur de hauteur 1 est le radical d'un idéal principal.

*Preuve.* Soient  $\alpha$  un idéal pseudopur de hauteur 1 et  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  ses idéaux premiers minimaux; alors, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , il existe  $c_i \in D$  avec  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{(c_i)}$  et ainsi, si  $c = \prod_{i=1}^n c_i$ , on a  $\sqrt{\alpha} = \sqrt{(c)}$ .

Il est clair que la propriété  $(\alpha)$  entraîne la propriété  $(\beta)$ , mais l'inverse est en général faux. En effet, si  $B = k[X, Y]/(X^2 - Y^3) = k[x, y]$  et  $D = B_{(x, y)}$ ,  $D$  a la propriété  $(\beta)$ , d'après la remarque 3.2., mais on voit facilement qu'il n'a pas la propriété  $(\alpha)$ . Toutefois le fait suivant est bien connu.

PROPOSITION 3.4. *Dans un anneau de Krull  $D$ , la propriété  $(\alpha)$  est équivalent à la propriété  $(\beta)$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de hauteur 1 de  $D$  et soit  $\mathfrak{p} = \sqrt{(c)}$ . Comme  $D_{\mathfrak{p}}$  est un DVR, il existe  $n \in \mathbb{N}$  avec  $cD_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^n D_{\mathfrak{p}}$ . On voit alors facilement que l'on a  $\mathfrak{p}^{(n)} = (c)$ .

On a alors:  $D$  factoriel  $\Rightarrow D$  semi-factoriel  $\Rightarrow D$  a la propriété  $(\alpha)$   $\Rightarrow D$  a la propriété  $(\beta)$ ; il est bien connu (cfr. par exemple [11]) que si  $D$  est un anneau du type  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathfrak{p}$  ayant la propriété  $(\beta)$ , il est factoriel.

PROPOSITION 3.5. *Si  $D$  a la propriété  $(\beta)$  et si  $S$  est une partie multiplicative de  $D$ , alors  $D_s$  a la propriété  $(\beta)$ .*

*Preuve.* Tout idéal premier de hauteur 1 de  $D_s$  est du type  $\mathfrak{p}D_s$  avec  $\mathfrak{p}$  idéal premier de hauteur 1 de  $D$ . Si  $\mathfrak{p} = \sqrt{(c)}$ , on a  $\mathfrak{p}D_s = \sqrt{cD_s}$ .

COROLLAIRE 3.6. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- a)  $D_{\mathfrak{p}}$  a la propriété  $(\beta)$  pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$ ;
- b)  $D_{\mathfrak{m}}$  a la propriété  $(\beta)$  pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$ .

DÉFINITION 3.7. On dit que  $D$  a *localement* la propriété  $(\beta)$  (ou qu'il est *localement*  $(\beta)$ ) si, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $D$ ,  $D_{\mathfrak{m}}$  a la propriété  $(\beta)$ .

Il résulte de la définition et de la prop. 3.5. que si  $D$  a la propriété  $(\beta)$  il l'a aussi localement. L'inverse, toutefois, est faux en général, comme il est montré par le suivant

EXEMPLE 3.8. Soit  $D = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ ; alors  $D$  est localement  $(\beta)$ , puisque il a dimension 1, mais il n'est pas factoriel, et par suite il n'a pas la propriété  $(\beta)$ .

Dans ce qui suit, nous supposons que  $D$  soit noethérien et que soit  $X = \text{Spec } D$ .

Il est clair que si  $\mathfrak{a}$  est un idéal de  $D$  et  $F$  est le fermé de  $X$  défini par  $\mathfrak{a}$ , alors  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  est le radical d'un idéal principal si et seulement si  $X - F$  est un ouvert affine principal, et  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  est localement radical d'idéaux principaux si et seulement si l'ouvert  $X - F$  est localement principal, auquel cas

$X - F$  est affine. Il peut toutefois y avoir des ouverts affines non localement principaux. Si par exemple  $X$  est le cône affine projetant la cubique elliptique plane projective sur  $\mathbf{C}$ ,  $\Gamma$ , si  $P$  est un point de  $\Gamma$  dont aucun multiple n'est intersection complète et si  $F$  est la droite qui projette  $P$ , il est bien connu que  $X - F$  est un ouvert affine non localement principal.

Le sens géométrique des propriétés «  $(\beta)$  » et « localement  $(\beta)$  » est clarifié par les remarques suivantes :

- a)  $D$  a la propriété  $(\beta)$  si et seulement si les ouverts de  $X$  définis par idéaux pseudopurs de hauteur 1 sont exactement les idéaux principaux ;
- b)  $D$  est localement  $(\beta)$  si et seulement si les ouverts de  $X$  définis par les idéaux pseudopurs de hauteur 1 sont exactement les ouverts localement principaux.

PROPOSITION 3.9. Soient  $D$  un anneau intègre localement  $(\beta)$ ,  $\alpha$  un idéal de  $D$  et considérons les conditions

- a) le fermé  $V(\alpha)$  est pur de codimension 1 ;
- b) l'ouvert  $U_\alpha$  est localement principal ;
- c) l'ouvert  $U_\alpha$  est affine.

On a alors a)  $\Leftrightarrow$  b)  $\Rightarrow$  c). En outre, si la clôture intégrale  $D^*$  de  $D$  est noethérienne, les trois conditions sont équivalentes.

*Preuve.* L'équivalence des deux premières conditions est claire, et il résulte du coroll. 2.8. que b)  $\Rightarrow$  c). Si  $D^*$  est noethérien et  $U_\alpha$  est affine, on a, d'après le théor. 2.6.,  $\alpha T(\alpha) = T(\alpha)$ , ce qui entraîne (prop. 2.11.) que  $\alpha$  est pseudopur de hauteur 1. Donc c)  $\Rightarrow$  a).

La proposition 3.9. généralise la prop. 2. de [2], qui affirme que si  $D$  est localement semi-factoriel, les ouverts affines de  $X$  sont exactement les complémentaires des fermés de codimension pure 1. En effet, comme nous avons vu, la condition « localement semi-factoriel » est plus forte de notre « localement  $(\beta)$  ». Des exemples d'anneaux intègres non localement semi-factoriels mais localement  $(\beta)$  sont tous les anneaux intègres de dimension 1 non intégralement clos ; mais on a aussi des classes d'exemples en dimension plus haute ; pour le voir, démontrons la

PROPOSITION 3.10. Soit  $D$  un anneau intègre dont la clôture intégrale  $D^*$  est localement  $(\beta)$ . Supposons en outre que

- a) le conducteur  $m_0$  de  $D$  dans  $D^*$  soit un idéal maximal de hauteur  $\geq 2$  dans  $D$  ;
- b) il existe un seul idéal maximal  $m_0^*$  de  $D^*$  au-dessus de  $m_0$  ;
- c) il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $(\sqrt{m_0^*})^n \subseteq D$  (toujours vrai si  $D^*$  est noethérien). Alors  $D$  est localement  $(\beta)$ .

*Preuve.* Remarquons en premier lieu que les hypothèses indiquées entraînent la bijectivité de l'application canonique de  $\text{Spec } D^*$  en  $\text{Spec } D$ .

Or, si  $m$  est un idéal maximal de  $D$  et  $m^*$  est le seul idéal maximal de  $D^*$  au-dessus de  $m$ , on a  $D_{m^*}^* = D_m^*$  (cfr. [3], ch. V, § 2, prop. 2); en outre, si  $m \neq m_0$ , on a  $D_m = D_{m^*}^*$ , donc  $D_m$  a la propriété  $(\beta)$ .

Soient donc  $m = m_0$ ,  $p$  un idéal premier de hauteur 1 de  $D$  contenu dans  $m$  et  $p^*$  le seul idéal premier de  $D^*$  (nécessairement de hauteur 1) tel que  $p^* \cap D = p$ . Alors on a  $\sqrt{pD_m^*} = p^*D_m^*$ ; mais  $D_m^* = D_{m^*}^*$  a la propriété  $(\beta)$ , donc il existe  $f \in p^*$  tel que  $p^*D_m^* = \sqrt{fD_m^*}$ . L'hypothèse c) entraîne que  $f^n \in D$ . Montrons que  $pD_m = \sqrt{f^nD_m}$  en montrant que  $pD_m$  est l'unique idéal premier de hauteur 1 de  $D_m$  contenant  $f^n$ .

En effet, si  $qD_m$  est un autre idéal premier de hauteur 1 de  $D_m$  contenant  $f^n$  et si  $q^*$  est le seul idéal premier de  $D^*$  au-dessus de  $q$ , on a  $f^n \in q^*$ ; donc  $f \in q^*$ ,  $p^*D_m^* = \sqrt{fD_m^*} \subseteq q^*D_m^*$  et  $qD_m^* \neq D_m^*$ , puisque  $q \subseteq m$  et ainsi  $q^* \subseteq m^*$ . Alors, comme  $h(p^*D_m^*) = h(q^*D_m^*)$ , on a  $q^*D_m^* = p^*D_m^*$ ; donc  $q^* = p^*$  et  $q = p$ .

**REMARQUE 3.11.** Si  $D$  est un anneau intègre noethérien vérifiant les conditions de la proposition précédente,  $D$  a la propriété  $R_1$ ; en effet, si  $p$  est un idéal premier de hauteur 1 de  $D$  et  $p^*$  est le seul idéal premier de  $D^*$  au-dessus de  $p$ , on a  $D_p = D_{p^*}^*$  et ce dernier anneau est un *DVR*, puisque  $D^*$  est un anneau de Krull. On en déduit que, si  $D$  n'est pas intégralement clos,  $D$  n'est pas  $S_2$ ; donc tout anneau intègre local non intégralement clos vérifiant les conditions de la prop. 3.10. constitue un exemple d'anneau intègre ayant la propriété  $(\beta)$  mais non  $S_2$ , ce qui répond négativement à une question posée par E. Stagnaro dans [11].

**EXEMPLE 3.12.** Soit  $D = k[X, XY, Y^2, Y^3]$ ; alors la clôture intégrale de  $D$  est  $D^* = k[X, Y]$ , et le conducteur de  $D$  en  $D^*$  est  $m_0 = (X, XY, Y^2, Y^3)D = (X, Y^2)D^*$ . Alors le seul idéal maximal

de  $D^*$  au-dessus de  $m_0$  est  $(X, Y) D^*$  et  $(\sqrt{m_0}^{D^*})^2 = ((X, Y) D^*)^2 \subseteq D$ ; donc, d'après la prop. 3.10.,  $D$  est localement  $(\beta)$ , mais il n'est pas  $S_2$ .

EXEMPLE 3.13. L'anneau  $B = \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$  vérifie les conditions du corollaire 4.7. de [12], et ainsi l'anneau intègre  $D = B[[T]]$  a les propriétés  $(\beta)$  et  $S_2$ , mais il n'est pas intégralement clos.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BASTIDA, E. and R. GILMER. Overrings and divisorial ideals of rings of the form  $D + M$ . *Mich. Math. J.* 20 (1973), pp 79-87.
- [2] BELTRAMETTI, M. e F. ODETTI. Semifattorialità e aperti affini. *Ann. Univ. Ferrara* 23 (1977), pp. 11-16.
- [3] BOURBAKI, N. *Algèbre Commutative*. Ch. 5 et 6, Paris, Hermann, 1964.
- [4] GILMER, R. and J. HUCKABA. The transform formula for ideals. *J. Algebra* 21 (1972), pp. 191-215.
- [5] GROTHENDIEK, A. et J. DIEUDONNÉ. *Eléments de Géométrie Algébrique. I*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1971.
- [6] ——— *Eléments de Géométrie Algébrique, Ch. IV, 4<sup>e</sup> partie*. Publ. Math. I.H.E.S. N° 32, Paris, 1967.
- [7] HARTSHORNE, R. Cohomological dimension of algebraic varieties. *Ann. of Math.* 88 (1968), pp. 401-450.
- [8] NAGATA, M. A treatise on the 14-th problem of Hilbert. *Mem. of the College of Science, Univ. of Kyoto*, 30 (1956), pp. 57-70.
- [9] ——— A theorem on finite generation of a ring. *Nagoya Math. J.* 27 (1966), pp. 193-205.
- [10] RAMELLA, L. On the Nagata transform of an ideal. *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino (à paraître)*.
- [11] STAGNARO, E. Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale. *Ann. Univ. Ferrara* 29 (1974), pp. 157-179.
- [12] TAMONE, G. Su una condizione di fattorialità debole e l'annullamento del gruppo di Picard. *Ann. di Matem.* 112 (1974), pp. 285-304.

(Reçu le 4 décembre 1978)

Domenico Arezzo  
Luciana Ramella

Istituto di Matematica  
via L. B. Alberti 4  
16132 GENOVA (Italie)