1. GÉNÉRALITÉS SUR LE TRANSFORMÉ D'UN IDÉAL

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

classe d'exemples d'anneaux ayant localement la propriété (β) mais non intégralement clos.

Dans tout le travail, nous noterons par D un anneau commutatif à élément unité intègre et par K son corps des fractions.

1. Généralités sur le transformé d'un idéal

Dans cette section nous rappelons la définition et les principales propriétés du transformé d'un idéal $\mathfrak{a}$ de D, que nous utiliserons par la suite; pour des indications plus complètes sur les propriétés du transformé, voir [4], [9] ou [10].

Définition 1.1. Le *transformé* d'un idéal $\mathfrak{a}$ de D est l'overring de D [1] défini par

$$T(\mathfrak{a}) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (D : \mathfrak{a}^n) = \{ x \in K \mid \text{il existe } n \in \mathbf{N} \text{ avec } x\mathfrak{a}^n \subseteq D \} .$$

Proposition 1.2. *On a les faits suivants :*

a) $T((a)) = D_a$ *si* $a \neq 0$ (*en particulier* $T(D) = D$); $T((0)) = K$.

b) *Si il existe* $n \in \mathbf{N}$ *avec* $\mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{b}$, $T(\mathfrak{a}) \supseteq T(\mathfrak{b})$.

c) *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a}^n)$.

d) *Si* $\sqrt{\mathfrak{a}}$ *est de type fini,* $T(\mathfrak{a}) = T(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

e) *Si* $\sqrt{\mathfrak{a}}$ *est de type fini et si il existe* $c \in D$ *avec* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(c)}$, *alors* $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$.

f) $T(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = T(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \supseteq T(\mathfrak{a}) + T(\mathfrak{b}) \supseteq T(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = T(\mathfrak{a}) \cap T(\mathfrak{b})$.

g) *Si* $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $T(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{n} D_{a_i}$.

h) *Si* $T(\mathfrak{b}) = D$ *ou* $T(\mathfrak{b}) = K$, $T(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = T(\mathfrak{a}) + T(\mathfrak{b})$.

Preuve. Chaque affirmation est conséquence immédiate de la définition et des affirmations précédents.

Théorème 1.3. *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal et* D' *un overring de* D *avec* $D \subseteq D' \subseteq T(\mathfrak{a})$. *Alors l'application canonique* Spec $D' \to$ Spec D *induit un*

---

[1]) Un *overring* de D est un anneau contenant D et contenu dans K.

isomorphisme φ *(pour la relation d'inclusion) de l'ensemble des idéaux premiers de* D' *ne contenant pas* $\mathfrak{a}D'$ *sur l'ensemble des idéaux premiers de* D *ne contenant pas* $\mathfrak{a}$. *En outre, si* $\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{p}')$, *on a* $D'_{\mathfrak{p}'} = D_{\mathfrak{p}}$.

Preuve. Cfr. [8] ou [9].

PROPOSITION 1.4. *Soit* $\{\mathfrak{p}_\alpha\}$ *la famille des idéaux premiers de* D *ne contenant pas* $\mathfrak{a}$. *Alors* $T(\mathfrak{a}) \subseteq \bigcap_\alpha D_{\mathfrak{p}_\alpha}$; *en outre, si* $\mathfrak{a}$ *est de type fini, on a l'égalité.*

Preuve. Si $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}$, soit $x \in \mathfrak{a}$ et $x \notin \mathfrak{p}$; on a alors $T(\mathfrak{a}) \subseteq T((x)) = D_x \subseteq D_{\mathfrak{p}}$, d'où la première affirmation. La seconde est évident si $\mathfrak{a}$ est principal et ainsi elle découle de la prop. 1.2. g).

REMARQUE 1.5. Si l'idéal $\mathfrak{a}$ n'est pas de type fini, on peut avoir $T(\mathfrak{a}) \neq \bigcap_\alpha D_{\mathfrak{p}_\alpha}$; soit pour exemple V un anneau de valuation non discrète de rang 1 du type $V = k + \mathfrak{m}$ avec k corps et $\mathfrak{m}$ idéal maximal de V; soit en outre $D = F + \mathfrak{m}$ où F est un sous-corps propre de k. On a alors $T(\mathfrak{m}) = V$ (cfr. [1], cor. 3.8.), qui ne peut pas être intersection de localisations de D, les uniques localisations de D étant D et K.

La proposition suivante permet une interprétation géométrique du transformé d'un idéal.

PROPOSITION 1.6. *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal de type fini de* D, $X = \operatorname{Spec} D$ *et* U *l'ouvert de* X *défini par* $\mathfrak{a}$. *Alors* $T(\mathfrak{a}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

Preuve. Comme D est intègre, on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}} D_{\mathfrak{p}}$ (cfr. [5], I.8.5.1.); la proposition résulte donc de la prop. 1.4.

Une autre propriété géométrique du transformé est exprimée par la

PROPOSITION 1.7. *Si* D *est noethérien, alors* $T(\mathfrak{a}) = D$ *pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de hauteur* $\geqslant 2$ *si et seulement si* D *a la propriété* S_2.

Preuve. Si pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de hauteur $\geqslant 2$ on a $T(\mathfrak{a}) = D$, l'homomorphisme $D = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = T(\mathfrak{a})$, où $X = \operatorname{Spec} D$ et U

est l'ouvert de X défini par $\mathfrak{a}$, est bijectif, c'est-à-dire D a la propriété S_2 (cfr. [6], 21.13.4.). Réciproquement, si D a la propriété S_2 et $h(\mathfrak{a}) \geqslant 2$, on a $T(\mathfrak{a}) \subseteq \bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} D_{\mathfrak{p}} = D$.

2. Sur la condition $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$

Dans cette section on étudie la condition $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$. En particulier, on prouve que pour les idéaux de type fini elle est une propriété locale (prop. 2.3.) et que les idéaux qui la vérifient sont exactement ceux qui définissent dans $X = \operatorname{Spec} D$ les ouverts affines (théor. 2.6.), ce qui met en évidence l'aspect géométrique de la condition même. On retrouve ainsi, comme corollaire, le fait bien connu que les ouverts d'une courbe affine sont tous affines (rém. 2.9.). La section termine avec la démonstration que, si la clôture intégrale D^* de D est noethérienne, la condition $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$ peut être vérifiée seulement par les idéaux pseudopurs [1)] de hauteur 1 (prop. 2.11).

Rappelons d'abord un résultat dû à M. Nagata (cfr. [9]).

Lemme 2.1. *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal de type fini et* J *un overring plat de* D. *Alors on a* $T(\mathfrak{a}J) = T(\mathfrak{a})J$.

Remarque 2.2. R. Gilmer et J. Huckaba, dans [4], ont montré avec un exemple que l'hypothèse que l'idéal $\mathfrak{a}$ soit de type fini est essentiel dans le lemme 2.1.

Proposition 2.3. *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini de* D, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$;

b) $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}J) = T(\mathfrak{a}J)$ *pour tout overring plat* J *de* D;

c) $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}}) = T(\mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}})$ *pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* D.

---

1) Un idéal $\mathfrak{a}$ est dit *pseudopur* si les idéaux premiers minimaux de $\mathfrak{a}$ ont tous la même hauteur.