2. Sur la condition aT(a) = T(a)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

est l'ouvert de X défini par $\mathfrak{a}$, est bijectif, c'est-à-dire D a la propriété S_2 (cfr. [6], 21.13.4.). Réciproquement, si D a la propriété S_2 et $h(\mathfrak{a}) \geqslant 2$, on a $T(\mathfrak{a}) \subseteq \bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} D_{\mathfrak{p}} = D$.

2. Sur la condition $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$

Dans cette section on étudie la condition $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$. En particulier, on prouve que pour les idéaux de type fini elle est une propriété locale (prop. 2.3.) et que les idéaux qui la vérifient sont exactement ceux qui définissent dans $X = \operatorname{Spec} D$ les ouverts affines (théor. 2.6.), ce qui met en évidence l'aspect géométrique de la condition même. On retrouve ainsi, comme corollaire, le fait bien connu que les ouverts d'une courbe affine sont tous affines (rém. 2.9.). La section termine avec la démonstration que, si la clôture intégrale D^* de D est noethérienne, la condition $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$ peut être vérifiée seulement par les idéaux pseudopurs [1)] de hauteur 1 (prop. 2.11).

Rappelons d'abord un résultat dû à M. Nagata (cfr. [9]).

Lemme 2.1. *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal de type fini et* J *un overring plat de* D. *Alors on a* $T(\mathfrak{a}J) = T(\mathfrak{a})J$.

Remarque 2.2. R. Gilmer et J. Huckaba, dans [4], ont montré avec un exemple que l'hypothèse que l'idéal $\mathfrak{a}$ soit de type fini est essentiel dans le lemme 2.1.

Proposition 2.3. *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini de* D, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$;

b) $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}J) = T(\mathfrak{a}J)$ *pour tout overring plat* J *de* D;

c) $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}}) = T(\mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}})$ *pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* D.

---

1) Un idéal $\mathfrak{a}$ est dit *pseudopur* si les idéaux premiers minimaux de $\mathfrak{a}$ ont tous la même hauteur.

Preuve. Il résulte du lemme 2.1. que a) $\Rightarrow$ b), et l'implication b) $\Rightarrow$ c) est évidente. Pour prouver que c) entraîne a), rappelons que si F est un sous-D-module de K on a $F = \cap F_{\mathfrak{m}}$ où l'intersection est étendue à tous les idéaux maximaux de D, et que $F_{\mathfrak{m}} = FD_{\mathfrak{m}}$; on a donc

$$\begin{aligned} T(\mathfrak{a}) &= \cap\, T(\mathfrak{a})\, D_{\mathfrak{m}} = \cap\, T(\mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}}) = \cap\, \mathfrak{a}T(\mathfrak{a}D_{\mathfrak{m}}) \\ &= \cap\, \mathfrak{a}T(\mathfrak{a})\, D_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.4. *Si D est noethérien et $\mathfrak{a}$ est un idéal de D tel que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de D, $\sqrt{\mathfrak{a}}\, D_{\mathfrak{m}}$ est le radical d'un idéal principal, alors $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$.*

Preuve. En effet, il résulte de la prop. 1.2. e) que la condition c) de la prop. 2.3. est vérifiée.

PROPOSITION 2.5. *Soient $\mathfrak{a}$ un idéal et D' un overring noethérien de D contenu dans $T(\mathfrak{a})$. Soient en outre X = Spec D, X' = Spec D', U l'ouvert de X défini par $\mathfrak{a}$ et U' l'ouvert de X' défini par $\mathfrak{a}D'$. On a alors un isomorphisme canonique entre $(U', \mathcal{O}_{X'|U'})$ et $(U, \mathcal{O}_{X|U})$.*

Preuve. L'immersion $D \hookrightarrow D'$ induit un morphisme canonique de schémas $(f, \theta)\colon (X', \mathcal{O}_{X'}) \to (X, \mathcal{O}_X)$. D'après le théorème 1.3., la restriction de f à U' est une bijection entre U' et U, donc, pour prouver que f est un homéomorphisme entre U' et U, montrons que si V est une partie fermée de U', $f(V)$ est une partie fermée de U. On peut supposer que V soit irréductible et définie par un élément de U'; en effet, si $V = V(\mathfrak{b}) \cap U'$, avec $\mathfrak{b}$ idéal de D' et si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sont les idéaux premiers minimaux de $\mathfrak{b}$, on a

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} (V(\mathfrak{p}_i) \cap U')$$

et en outre $V(\mathfrak{p}_i) \cap U' \neq \varnothing$ si et seulement si $\mathfrak{p}_i \in U'$.

Soit donc $V = \{\mathfrak{p}' \in U' \mid \mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{q}'\}$ avec $\mathfrak{q}' \in U'$ et prouvons que $f(V) = \{\mathfrak{p} \in U \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}' \cap D\}$.

Soit $\mathfrak{p} \in U$ tel que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}' \cap D$; il existe $\mathfrak{p}' \in U'$ tel que $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}' \cap D$ et d'après le théorème 1.3. on a $D'_{\mathfrak{p}'} = D_{\mathfrak{p}} \subseteq D'_{\mathfrak{q}' \cap D} = D'_{\mathfrak{q}'}$; il en résulte que $\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{q}'$, donc $\mathfrak{p} \in f(V)$. L'autre inclusion est évidente. La conclusion résulte alors de [5] I.4.2.

THÉORÈME 2.6. *Soient* D *un anneau intègre noethérien,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* D *et* U *l'ouvert de* $X = \operatorname{Spec} D$ *défini par* $\mathfrak{a}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$.

b) *Le schéma* $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ *est affine.*

c) *Il y a un isomorphisme canonique entre les schémas* $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ *et* $(\operatorname{Spec} T(\mathfrak{a}), \widetilde{T(\mathfrak{a})})$.

Preuve. Si $1 \in T(\mathfrak{a})$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $1 \in \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-n}$, où $\mathfrak{a}^{-n} = \{ x \in K \mid x\mathfrak{a}^n \subseteq D \}$; alors, dit $D' = D[\mathfrak{a}^{-n}]$, on a $\mathfrak{a}D' = D'$ et D' est un overring noethérien de D contenu dans $T(\mathfrak{a})$; donc, d'après la prop. 2.5. on a $(U, \mathcal{O}_{X|U}) \cong (\operatorname{Spec} D', \tilde{D}')$. Cela prouve que a) $\Rightarrow$ b). Le fait que b) $\Rightarrow$ c) résulte de la prop. 1.6. Enfin, si c) est vrai, $T(\mathfrak{a})$ est noethérien, $\operatorname{Spec} T(\mathfrak{a})$ étant un sous-schéma du schéma noethérien $\operatorname{Spec} D$; on a donc, d'après la prop. 2.4., un homéomorphisme canonique entre $\operatorname{Spec} T(\mathfrak{a})$ et l'ouvert de $\operatorname{Spec} T(\mathfrak{a})$ défini par $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a})$; mais ceci prouve que la partie fermée de $\operatorname{Spec} T(\mathfrak{a})$ défini par $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a})$ est vide et on en conclut que l'on a $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$.

REMARQUE 2.7. L'hypothèse que D soit noethérien est essentiel dans le théorème 2.6. En effet, si D est un anneau de valuation non discrète de rang 2 dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ est la chaîne de ses idéaux premiers et $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{p}$, l'ouvert $\operatorname{Spec} D - V(\mathfrak{m}) = \operatorname{Spec} D_f$ est affine, même si l'on a $T(\mathfrak{m}) = D$ (puisque $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$) et donc $\mathfrak{m}T(\mathfrak{m}) \neq T(\mathfrak{m})$.

COROLLAIRE 2.8. *Supposons* D *noethérien et soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* D *tel que est localement radical d'idéaux principaux. Alors l'ouvert* $U_{\mathfrak{a}}$ *de* $X = \operatorname{Spec} D$ *défini par* $\mathfrak{a}$ *est affine.*

Preuve. Cela résulte aussitôt du coroll. 2.4. et du théor. 2.6.

REMARQUE 2.9. La condition suffisante du corollaire 2.8. étant vérifiée pour tout idéal si $\dim D = 1$, on retrouve le fait bien connu que les ouverts des courbes affines sont tous affines.

Remarque 2.10. Le corollaire 2.8. avait déjà été démontré par R. Hartshorne dans [7], en utilisant des méthodes de cohomologie locale.

Nous donnons maintenant une condition nécessaire pour que un idéal d'un anneau D à clôture intégrale noethérienne définisse dans Spec D un ouvert affine.

Proposition 2.11. *Soient* D *un anneau intègre noethérien dont la clôture intégrale est aussi noethérienne et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* D *tel que* $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$. *Alors* $\mathfrak{a}$ *est pseudopur de hauteur* 1.

Preuve. Supposons d'abord que D soit intégralement clos. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ les idéaux premiers minimaux de $\mathfrak{a}$ et supposons qu'on ait $h(\mathfrak{p}_1) \geqslant 2$. Soit $f \in \bigcap_{i=2}^{n} \mathfrak{p}_i$, $f \notin \mathfrak{p}_i$ (si $n=1$, $f=1$); on a alors $T(\mathfrak{a}D_f) = T(\sqrt{\mathfrak{a}}D_f) = T(\mathfrak{p}_1 D_f)$ et $h(\mathfrak{a}D_f) \geqslant 2$; donc, d'après la proposition 1.7., $T(\mathfrak{a}D_f) = D_f$ et alors $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}D_f) \neq T(\mathfrak{a}D_f)$, en contradiction avec la proposition 2.3.

Dans le cas général, soient D^* la clôture intégrale de D et φ: Spec $D^* \to$ Spec D le morphisme canonique. Comme $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$, l'ouvert $U =$ Spec $D - V(\mathfrak{a})$ est affine (théor. 2.6.) et ainsi, comme φ est un morphisme affine, l'ouvert $U^* =$ Spec $D^* - V(\mathfrak{a}D^*) = \varphi^{-1}(U)$ est affine dans Spec D^* il s'ensuit que $\mathfrak{a}D^*$ est pseudopur de hauteur 1, D^* étant noethérien et intégralement clos. Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de $\mathfrak{a}$; comme les idéaux premiers de D^* au-dessus de $\mathfrak{p}$ sont premiers minimaux de $\mathfrak{a}D^*$ et ceux-ci ont tous hauteur 1, $\mathfrak{p}$ a hauteur 1.

Remarque 2.12. Il résulte de la prop. 2.11. et du théor. 2.6. que si D est un anneau noethérien dont la clôture intégrale est aussi noethérienne, les idéaux de hauteur $\geqslant 2$ ne peuvent pas définir des ouverts affines dans Spec D. Si l'anneau $(D, \mathfrak{m})$ est locale de dimension $\geqslant 2$, Spec $D - \{\mathfrak{m}\}$ ne peut pas être affine. En effet, si D est intégralement clos, d'après la prop. 1.7. on a $T(\mathfrak{m}) = D$ et ainsi $\mathfrak{m}T(\mathfrak{m}) \neq T(\mathfrak{m})$. Dans le cas général, soient D^* la clôture intégrale de D et φ: Spec $D^* \to$ Spec D le morphisme affine canonique; alors, si Spec $D - \{\mathfrak{m}\}$ est affine, il en est de même de Spec $D^* - V(\mathfrak{m}D^*) = \varphi^{-1}$ (Spec $D - \{\mathfrak{m}\}$), ce qui est absurde.