3. Der satz von G. Forst

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

$$\lim_{t \to 0} P_t f = f \qquad \textit{für alle } f \in C_0(X)$$

im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz erfüllt ist. Einer solchen Fellerschen Halbgruppe sind wir in der klassischen Theorie bereits begegnet: die Brownsche Halbgruppe ist Fellersch. Jeder der Kerne P_t ist dort sogar Markovsch, erfüllt also $P_t 1 = 1$.

Eines der Leitmotive für die Entwicklung der Theorie der harmonischen Räume war, über Jahre hinweg, die Frage nach der Existenz einer Halbgruppe von Kernen auf einem streng harmonischen Raum $(X, \mathscr{H})$ derart, daß, wie in der klassischen Theorie, die exzessiven Funktionen mit den hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$ auf X übereinstimmen. Hyperharmonisch heissen dabei die durch die Mittelwerteigenschaft (für reguläre Mengen) definierten nach unten halbstetigen Funktionen. Die Antwort auf diese Frage ist Ja. Sie wurde durch MEYER [23] für Brelotsche und später durch BOBOC-CONSTANTINESCU-CORNEA [9] und HANSEN [18], [19] für allgemeinere Typen harmonischer Räume gegeben:

2.1. *Auf einem streng harmonischen Raum* $(X, \mathscr{H})$ *existieren stets ein strikt positives, stetiges, reelles Potential* q *und eine Fellersche Halbgruppe* $(Q_t)_{t>0}$ *derart, dass deren exzessive Funktionen mit den mit* $\frac{1}{q}$ *multiplizierten nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen übereinstimmen.*

Ist die konstante Funktion 1 *hyperharmonisch, so fallen die nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen mit den exzessiven Funktionen der neuen Halbgruppe*

$$P_t f = q\, Q_t\left(\frac{1}{q} f\right) \qquad (f \in C_0(X)) \tag{14}$$

zusammen.

Man nennt die Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ auf Grund ihrer Herkunft auch *quasi-Fellersch.*

3. DER SATZ VON G. FORST

Im Gegensatz zu der dem Resultat 2.1 zugrunde liegenden Fragestellung ist die umgekehrte Frage nach Eigenschaften einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen auf einem Raum X, welche die Existenz eines Garbendatums $\mathscr{H}$ garantieren, so daß $(X, \mathscr{H})$ ein harmonischer Raum und die exzessiven Funktionen von $(P_t)_{t>0}$ mit den hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$ zusammenfallen, neueren Datums. Es sind nur Teilantworten bekannt.

Jede Teilantwort ist aber von Interesse, da sie erhoffen läßt, dem Problem der Produktbildung harmonischer Räume näher zu treten.

Sind nämlich $(P_t)_{t>0}$ und $(P'_t)_{t>0}$ Halbgruppen von Kernen auf lokalkompakten Räumen X bzw. X', so liefert die Bildung der Produktmaße

$$Q_t((x, x'), .) = P_t(x, .) \otimes P'_t(x', .)$$

eine Halbgruppe $(Q_t)_{t>0}$ von Kernen auf $X \times X'$. Sind $(P_t)_{t>0}$ und $(P'_t)_{t>0}$ im Sinne von Satz 2.1 mit harmonischen Strukturen $\mathscr{H}$ auf X bzw. $\mathscr{H}'$ auf X' verknüpft und läßt sich mit Hilfe allgemeiner Sätze entscheiden, ob auch $(Q_t)_{t>0}$ zu einer harmonischen Struktur gehört, so liegt es nahe, diese als ein Produkt der harmonischen Räume $(X, \mathscr{H})$ und $(X', \mathscr{H}')$ zu interpretieren. Zu diesem Problem sind gerade in letzter Zeit Resultate von U. SCHIRMEIER [28] erzielt worden. Hier geht es uns nur um den Hinweis auf die grundsätzliche Bedeutung dieser Fragestellung: Wir werden sehen, daß sie selbst unter stark einschränkenden Zusatzannahmen zu neuen, überraschenden Beispielen harmonischer Räume führt.

Es werde jetzt nämlich vorausgesetzt, daß der lokal-kompakte Grundraum eine lokal-kompakte abelsche Gruppe G mit abzählbarer Basis ist; ferner sei die gegebene Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ Fellersch und translationsinvariant, also

$$P_t(f \circ \tau_{-a}) = \tau_a(P_t f)$$

für jede Translation $\tau_a(x) = x + a$ erfüllt ($t > 0$, f Borel-meßbar $\geqslant 0$). Diese und allein diese Halbgruppen rühren von Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t>0}$ von positiven Radon-Maßen auf G her, d.h. es gilt

$$P_t f = \mu_t * f. \tag{15}$$

Faltungshalbgruppe heiße dabei, daß neben

$$\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t \qquad \textit{für } s, t > 0 \tag{16}$$

die Bedingungen

$$\mu_t(G) \leqslant 1 \qquad (t > 0) \tag{17}$$

und

$$\lim_{t \to 0} \mu_t = \varepsilon_0 \tag{18}$$

(in der vagen Topologie) erfüllt sind.[1])

[1]) ε_0 bezeichnet die Einheitsmasse in 0. Zu diesem und den folgenden Resultaten über Faltungshalbgruppen vom lokalen Typ vergleiche man BERG-FORST [7].

Eine solche Faltungshalbgruppe heißt vom *lokalen Typ*, wenn für ihren infinitesimalen Erzeuger A mit Definitionsbereich $D_A \subset C_0(G)$ gilt: ist $f \in D_A$ Null in der Umgebung eines Punktes $x \in G$, so ist f an der Stelle x gleich Null. Im Fall einer *symmetrischen* Halbgruppe, wo also jedes der Maße μ_t bei der Spiegelung $x \mapsto -x$ in sich übergeht, ist dies äquivalent zum folgenden Verhalten der Fourier-Transformierten $\hat{\mu}_t$ von μ_t: es gibt eine stetige quadratische Form q auf der Charaktergruppe $\hat{G}$ und eine Konstante $c \geqslant 0$ mit

$$\hat{\mu}_t = e^{-t(c+q)} \quad \textit{für alle } t > 0. \tag{19}$$

Eine wichtige Beantwortung der zu Beginn dieses Abschnittes gestellten Frage gibt der folgende Satz von Forst [17]:

3.1. *Sei G eine nicht diskrete, lokal-kompakte abelsche Gruppe mit abzählbarer Basis. Ferner sei $(\mu_t)_{t>0}$ eine Faltungshalbgruppe von Massen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *(μ_t) ist symmetrisch und vom lokalen Typ;*

(ii) *die Halbgruppe ist transient, d.h. es existiert das Integral*

$$\kappa(f) = \int_0^\infty \mu_t(f)\, dt$$

für jede Funktion $f \in C_0(G)$ mit kompaktem Träger;

(iii) *bezüglich des Haarschen Masses Θ von G besitzt das Mass κ eine nach unten halbstetige Dichte N, welche auf $G \setminus \{0\}$ stetig und reell ist.*

Dann existiert ein translationsinvariantes, symmetrisches Garbendatum $\mathscr{H}$ auf G derart, dass $(G, \mathscr{H})$ ein strenger Brelot-Raum und N ein in $G \setminus \{0\}$ harmonisches Potential ist.

Aus einem Resultat von Bliedtner [8] folgt ferner

3.2. *Die nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen auf G fallen mit den exzessiven Funktionen der gegebenen Faltungshalbgruppe zusammen.*

Speziell ordnet sich die klassische Potentialtheorie in das Ergebnis von Forst ein.

Kehren wir nun nochmals zu der eingangs erhobenen Frage nach der Bildung von Produkten harmonischer Räume zurück. Man sieht sofort, daß die Produkthalbgruppe $(\mu_t \otimes \mu_t')_{t>0}$ auf $G \times G'$ die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt, wenn zwei vorgegebene Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t>0}$

und $(\mu_t')_{t>0}$ auf den Gruppen G bzw. G' diese Eigenschaften besitzen. Schwierigkeiten bereitet die Eigenschaft (iii).

Wir werden aber selbst in einem relativ krassen Fall sehen, daß sich auch die Eigenschaft (iii) durch Zusatzbedingungen erhalten läßt. Es wird sich um den Fall eines unendlichen Produktes handeln.

4. Harmonische Strukturen auf T^∞

Wir betrachten die Kreislinie T, also den eindimensionalen Torus. Auf der Charaktergruppe $\hat{T} = \mathbf{Z}$ sind $n \mapsto a\,n^2$ mit dem Normierungsfaktor $a \geqslant 0$ sämtliche quadratische Formen. Jeder dieser quadratischen Formen entspricht gemäß (19) eine symmetrische Faltungshalbgruppe $(\mu_{at})_{t>0}$ vom lokalen Typ auf T. Dabei hat μ_{at} eine stetige Dichte bezüglich des Haar-Maßes θ auf T (mit zu 1 normierter Gesamtmasse):

$$\mu_{at} = g_{at}\,\theta\,. \tag{20}$$

Diese Dichte ist für $a = 1$ der Wärmekern

$$\begin{aligned} g_t(\theta) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{-tn^2} e^{ik\theta} &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2}\cos n\theta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{(\theta+2\pi k)^2}{4t}\right)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

$(\mu_t)_{t>0}$ ist nichts anderes als die Faltungshalbgruppe der Brownschen Bewegung auf T.

Wir betrachten nun auf dem unendlich-dimensionalen Torus $T^\infty = \prod_{k=1}^{\infty} T_k$, wobei jedes T_k gleich T ist, für eine zunächst beliebig gegebene Folge $\mathscr{A} = (a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ reeller Zahlen $a_k > 0$ die Faltungshalbgruppe $(\mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ mit

$$\mu_t^{\mathscr{A}} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_{a_k t}\,. \tag{22}$$

Auf der Charaktergruppe $\hat{T}^\infty = \mathbf{Z}^{(\infty)}$, d.h. auf der direkten Summe von abzählbar unendlich vielen Kopien von $\mathbf{Z}$, ergibt sich die Fourier-Transformierte von $\mu_t^{\mathscr{A}}$ zu

$$\hat{\mu}_t^{\mathscr{A}}(n) = e^{-tq(n)} \tag{23}$$