4. Harmonische strukturen auf T^∞

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

und $(\mu_t')_{t>0}$ auf den Gruppen G bzw. G' diese Eigenschaften besitzen. Schwierigkeiten bereitet die Eigenschaft (iii).

Wir werden aber selbst in einem relativ krassen Fall sehen, daß sich auch die Eigenschaft (iii) durch Zusatzbedingungen erhalten läßt. Es wird sich um den Fall eines unendlichen Produktes handeln.

4. Harmonische Strukturen auf T^∞

Wir betrachten die Kreislinie T, also den eindimensionalen Torus. Auf der Charaktergruppe $\hat{T} = \mathbf{Z}$ sind $n \mapsto a\,n^2$ mit dem Normierungsfaktor $a \geqslant 0$ sämtliche quadratische Formen. Jeder dieser quadratischen Formen entspricht gemäß (19) eine symmetrische Faltungshalbgruppe $(\mu_{at})_{t>0}$ vom lokalen Typ auf T. Dabei hat μ_{at} eine stetige Dichte bezüglich des Haar-Maßes θ auf T (mit zu 1 normierter Gesamtmasse):

$$\mu_{at} = g_{at}\,\theta\,. \tag{20}$$

Diese Dichte ist für $a = 1$ der Wärmekern

$$\begin{aligned} g_t(\theta) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{-tn^2} e^{ik\theta} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \cos n\theta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{(\theta+2\pi k)^2}{4t}\right)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

$(\mu_t)_{t>0}$ ist nichts anderes als die Faltungshalbgruppe der Brownschen Bewegung auf T.

Wir betrachten nun auf dem unendlich-dimensionalen Torus $T^\infty = \prod_{k=1}^{\infty} T_k$, wobei jedes T_k gleich T ist, für eine zunächst beliebig gegebene Folge $\mathscr{A} = (a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ reeller Zahlen $a_k > 0$ die Faltungshalbgruppe $(\mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ mit

$$\mu_t^{\mathscr{A}} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_{a_k t}\,. \tag{22}$$

Auf der Charaktergruppe $\hat{T}^\infty = \mathbf{Z}^{(\infty)}$, d.h. auf der direkten Summe von abzählbar unendlich vielen Kopien von $\mathbf{Z}$, ergibt sich die Fourier-Transformierte von $\mu_t^{\mathscr{A}}$ zu

$$\hat{\mu}_t^{\mathscr{A}}(n) = e^{-tq(n)} \tag{23}$$

mit $q(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k^2$, wobei $n \in \mathbf{Z}^{(\infty)}$ eine Folge (n_k) ganzer Zahlen ist, von denen höchstens endlich viele $\neq 0$ sind. q ist eine stetige quadratische Form auf $\mathbf{Z}^{(\infty)}$. Daher ist $(\mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ symmetrisch und vom lokalen Typ, also die Bedingung (i) des Forstschen Satzes erfüllt. Da T^∞ kompakt, also die konstante Funktion 1 kompakten Träger besitzt und stets $\mu_t^{\mathscr{A}}(1) = 1$ gilt, liegt keine transiente Halbgruppe vor. Wir gehen daher für beliebiges $\lambda > 0$ zur Faltungshalbgruppe $(e^{-\lambda t} \mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ über, die (i) und (ii) erfüllt. Um (iii) erfüllen zu können, setzen wir

$$\rho_\lambda^{\mathscr{A}} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t^{\mathscr{A}} \, dt \,. \tag{24}$$

Nach einem bekannten Satz der harmonischen Analyse besitzt $\mu_t^{\mathscr{A}}$ genau dann eine *stetige* Dichte $g_t^{\mathscr{A}}$ bezüglich des Haar-Maßes Θ von T^∞, wenn

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^{(\infty)}} \hat{\mu}_t^{\mathscr{A}}(n) < +\infty \,.$$

Dies aber erweist sich als zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-t a_k} < +\infty \tag{25}$$

äquivalent. Unter der Voraussetzung der Gültigkeit von (25) für jedes $t > 0$ besitzt dann das Maß $\rho_\lambda^{\mathscr{A}}$ die Dichte

$$\tilde{\rho}_\lambda^{\mathscr{A}} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_t^{\mathscr{A}} \, dt \,, \tag{26}$$

welche sich als nach unten halbstetig erweist. Stets ist $\tilde{\rho}_\lambda^{\mathscr{A}}(0) = +\infty$. Von Berg [5] wurde zunächst die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^k}}{\sqrt{a_k}} < +\infty \,,$$

kurze Zeit darauf von Fuglede (unveröffentlicht)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_k}} < +\infty$$

und schließlich 1977 erneut von Berg [6] die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} < +\infty \tag{27}$$

als hinreichend dafür erkannt, daß (25) für jedes $t > 0$ gilt und $\rho_\lambda^{\mathscr{A}}$ für jedes $\lambda > 0$ in $T^\infty \setminus \{0\}$ stetig und reell ist. Auf diese Weise erhielt BERG [5], [6] den Satz:

4.1 *Erfüllt eine Folge* $\mathscr{A} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *positiver reeller Zahlen die Bedingung (27), so existiert auf* T^∞ *für jedes* $\lambda > 0$ *ein translationsinvariantes, symmetrisches Garbendatum* $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$, *für welches* $(T^\infty, \mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}})$ *ein strenger Brelot-Raum und* $\tilde{\rho}_\lambda^{\mathscr{A}}$ *ein strikt positives, in* $T^\infty \setminus \{0\}$ *harmonisches Potential ist.*

Damit hat man mittels Produktbildung eine ganze Schar harmonischer Strukturen $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$ auf dem unendlich-dimensionalen Torus konstruiert. Jede dieser Strukturen kann durch den linearen „*Differentialoperator*"

$$L_\lambda^{\mathscr{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2} - \lambda \cdot id \tag{28}$$

beschrieben werden. Bezeichnet nämlich $\pi_p : T^\infty \to T^p$ die kanonische Projektion von T^∞ auf den p-dimensionalen Torus T^p der ersten $p = 1,2,\ldots$ Koordinaten, so liegen alle Funktionen $f \circ \pi_p$ mit $f \in C^2(T^p)$ im Definitionsbereich des infinitesimalen Erzeugers $L_\lambda^{\mathscr{A}}$ von $(\mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ und es gilt

$$L_\lambda^{\mathscr{A}} (f \circ \pi_p) = \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_k^2} - \lambda f .$$

Mit distributionstheoretischen Methoden kann man, ausgehend von (28), das Garbendatum $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$ direkt beschreiben: Es bezeichne hierzu $\mathscr{D}(\Omega)$ für offenes $\Omega \subset T^\infty$ die Menge aller Funktionen $f \circ \pi_p$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $f \in C^\infty(T^p)$, deren Träger in Ω enthalten ist. Dann gilt

$$\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}} (\Omega) = \{ h \in C(\Omega) : \int_{T^p} h L_\lambda^{\mathscr{A}} g \, d\theta = 0 \;\; \textit{für alle } g \in \mathscr{D}(\Omega) \} .$$

Dabei kann man sogar $\lambda = 0$ zulassen. Allerdings ist der dann entstehende Brelot-Raum nicht mehr streng. Dieser Zugang findet sich ebenfalls bei BERG [5]. Analoge Resultate wurden von BENDJKOV [4] mit Methoden der Theorie der Markov-Prozesse erzielt.

5. BEZIEHUNGEN ZUR DIFFERENTIATIONSTHEORIE

Über die Theorie der harmonischen Räume hinaus werden der Potentialtheorie durch die Betrachtung von Halbgruppen von Kernen neue Dimensionen eröffnet. Dies soll nun noch kurz skizziert werden.