5. Beziehungen zur differentiationstheorie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

als hinreichend dafür erkannt, daß (25) für jedes $t > 0$ gilt und $\rho_\lambda^{\mathscr{A}}$ für jedes $\lambda > 0$ in $T^\infty \setminus \{0\}$ stetig und reell ist. Auf diese Weise erhielt BERG [5], [6] den Satz:

4.1 *Erfüllt eine Folge* $\mathscr{A} = (a_k)_{k \in \mathrm{N}}$ *positiver reeller Zahlen die Bedingung (27), so existiert auf* T^∞ *für jedes* $\lambda > 0$ *ein translationsinvariantes, symmetrisches Garbendatum* $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$, *für welches* $(T^\infty, \mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}})$ *ein strenger Brelot-Raum und* $\tilde{\rho}_\lambda^{\mathscr{A}}$ *ein strikt positives, in* $T^\infty \setminus \{0\}$ *harmonisches Potential ist.*

Damit hat man mittels Produktbildung eine ganze Schar harmonischer Strukturen $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$ auf dem unendlich-dimensionalen Torus konstruiert. Jede dieser Strukturen kann durch den linearen „*Differentialoperator*"

(28) $$L_\lambda^{\mathscr{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2} - \lambda \cdot id$$

beschrieben werden. Bezeichnet nämlich $\pi_p : T^\infty \to T^p$ die kanonische Projektion von T^∞ auf den p-dimensionalen Torus T^p der ersten $p = 1,2,\ldots$ Koordinaten, so liegen alle Funktionen $f \circ \pi_p$ mit $f \in C^2(T^p)$ im Definitionsbereich des infinitesimalen Erzeugers $L_\lambda^{\mathscr{A}}$ von $(\mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ und es gilt

$$L_\lambda^{\mathscr{A}}(f \circ \pi_p) = \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_k^2} - \lambda f .$$

Mit distributionstheoretischen Methoden kann man, ausgehend von (28), das Garbendatum $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$ direkt beschreiben: Es bezeichne hierzu $\mathscr{D}(\Omega)$ für offenes $\Omega \subset T^\infty$ die Menge aller Funktionen $f \circ \pi_p$ mit $p \in \mathrm{N}$ und $f \in C^\infty(T^p)$, deren Träger in Ω enthalten ist. Dann gilt

$$\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}(\Omega) = \{ h \in C(\Omega) : \int_{T^P} h L_\lambda^{\mathscr{A}} g \, d\theta = 0 \ \ \textit{für alle } g \in \mathscr{D}(\Omega) \} .$$

Dabei kann man sogar $\lambda = 0$ zulassen. Allerdings ist der dann entstehende Brelot-Raum nicht mehr streng. Dieser Zugang findet sich ebenfalls bei BERG [5]. Analoge Resultate wurden von BENDIKOV [4] mit Methoden der Theorie der Markov-Prozesse erzielt.

5. BEZIEHUNGEN ZUR DIFFERENTIATIONSTHEORIE

Über die Theorie der harmonischen Räume hinaus werden der Potentialtheorie durch die Betrachtung von Halbgruppen von Kernen neue Dimensionen eröffnet. Dies soll nun noch kurz skizziert werden.

Eine der einfachsten Faltungshalbgruppen auf **R** ist die Halbgruppe $(\varepsilon_{-t})_{t>0}$ der Einheitsmassen in $-t$. Die zugehörigen Kerne P_t operieren wie folgt

$$P_t f(x) = f(x+t).$$

Der durch Integration entstehende (Potential-) Kern V hat also die Gestalt

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt = \int_x^\infty f(t)\, dt.$$

Die *supermedian* genannten Funktionen bezüglich einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$, d.h. diejenigen Borel-meßbaren Funktionen $f \geqslant 0$ mit

$$P_t f \leqslant f \qquad \textit{für alle } t > 0,$$

sind im Falle dieser speziellen Halbgruppe gerade die monoton fallenden Funktionen $f \geqslant 0$ auf **R**. Für Lebesgue-integrierbares f auf **R** ist Vf absolut stetig und $\lim\limits_{x \to +\infty} Vf(x) = 0$. Setzen wir noch

$$D_t f = \frac{f - P_t f}{t} \qquad (t > 0)$$

und

$$Df = \limsup_{t \to 0} D_t f,$$

so erhält man aus den klassischen Differentiationssätzen der Lebesgueschen Theorie:

1. Für jede supermediane Funktion u existiert der *reelle* Limes

(29) $$Du = \lim_{t \to 0} D_t u \qquad \textit{fast überall.}$$

2. Für jede Borel-meßbare Funktion $f \geqslant 0$ auf **R** mit $Vf(x) < +\infty$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt

(30) $$DVf = f \qquad \textit{fast überall.}$$

Setzt man schließlich noch

$$D^* u = \sup_{t>0} D_t u,$$

so besagt das Maximallemma von Hardy-Littlewood:

3. Für jede supermediane Funktion u gilt

(31) $$V1_{\{D^*u \geqq \alpha\}} \leqslant \frac{u(x)}{\alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

Dabei bezeichnet 1_A die Indikatorfunktion einer Menge A; die linke Seite der Ungleichung (31) ist das Lebesgue-Maß der Menge

$$\{ y \in \mathbf{R} : D^* u(y) \geqslant \alpha \} \cap [x, +\infty[.$$

„Fast überall" heißt stets bis auf eine Borel-Menge A vom Lebesgue-Maß Null. Hiermit äquivalent ist aber die Forderung

$$V 1_A (x) = 0 \qquad \textit{für alle } x \in \mathbf{R}. \tag{32}$$

Interpretiert man in den Aussagen 1 und 2 fast überall im Sinne von (32), so bekommen die Aussagen 1—3 einen Sinn für beliebige Halbgruppen $(P_t)_{t>0}$ von Kernen auf einem Meßraum.

Es ist höchst bemerkenswert, daß die Aussagen 1—3 nahezu ohne Zusatzbedingungen für *sub-Markovsche* Halbgruppen $(P_t)_{t>0}$ auf einem Meßraum von Mokobodzki [25], [26] bewiesen werden konnten. Man muß eigentlich nur voraussetzen, daß die σ-Algebra des Meßraumes von den exzessiven Funktionen der Halbgruppe erzeugt wird. Dies ist in unserem eingangs gewählten Beispiel der Fall.

6. Ausblick: Resolventen in der Potentialtheorie

Häufig — ein typisches Beispiel hierfür ist der Beweis des Satzes 2.1 — gelangt man zu einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen nur auf dem Umweg über deren *Resolvente* $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, wobei V_λ den Kern,

$$V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, dt, \tag{33}$$

also die Laplace-Transformierte von $(P_t)_{t>0}$ bezeichnet. Es ist der Satz von Hille-Yosida, der von einer Resolvente, d.h. genauer von einer der Resolventengleichung

$$V_\lambda - V_\mu + (\lambda - \mu) V_\lambda V_\mu = 0 \qquad (\lambda, \mu > 0) \tag{34}$$

genügenden Familie $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ von Kernen zu einer zugehörigen, unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen eindeutig bestimmten Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen führt. (Vgl. Meyer [24].)

Außerdem ist es selbst bei gegebener Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ oft nur auf dem Umweg über die Resolvente möglich, gewisse Eigenschaften nachzuweisen. Ist beispielsweise $(P_t)_{t>0}$ eine Fellersche Halbgruppe auf einem lokal-kompakten Raum X mit abzählbarer Basis, so läßt sich die Exzessivi-