4. Le théorème de Bernstein-Darmois

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

(a) *μ est normale ;*

(b) *il existe un voisinage V de l'origine dans* $\mathbf{R}$ *et une application θ de V dans* $\mathbf{C}$ *telle que l'on ait*

$$(\varphi(t))^2 = \varphi(t+u)\,\varphi(t-u)\,\theta(u) \tag{3.2}$$

pour tout couple t, u d'éléments de V.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons donc la propriété (b) vérifiée. Quitte à remplacer φ par $\varphi\bar{\varphi}$, on peut supposer φ réelle. L'équation (3.2) fournit alors, pour $t = 0$, $1 = (\varphi(u))^2\,\theta(u)$, de sorte qu'elle peut s'écrire sous la forme équivalente

$$(\varphi(t)\,\varphi(u))^2 = \varphi(t+u)\,\varphi(t-u)\,.$$

En particulier, pour $t = u = s/2$, on trouve $(\varphi(s/2))^4 = \varphi(s)$. La conclusion résulte alors du Théorème (1.2) pour $c = 4$.

(3.3) *Remarque.* Le cas d'une loi μ dégénérée correspond à celui où l'équation (3.2) est vérifiée avec une fonction θ identiquement égale à 1.

4. Le théorème de Bernstein-Darmois

Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles, de même loi. Si le couple (X_1+X_2, X_1-X_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, alors la loi commune de X_1 et de X_2 est normale: c'est le théorème de Bernstein-Darmois sous sa forme primitive. Il fut d'abord démontré par S. Bernstein [1] avec l'hypothèse que la loi commune de X_1 et de X_2 possède des moments finis jusqu'à l'ordre 4. Plus tard G. Darmois [2] réussit à généraliser ce résultat, tout en s'affranchissant de l'hypothèse concernant l'existence des moments. Il employa à cet effet une technique de différences finies, qui lui permit également de démontrer une généralisation ultérieure, bien plus profonde, connue sous le nom de théorème de Skitovitch-Darmois (cf. [6]).

Nous présentons ci-dessous le théorème de Bernstein-Darmois, que nous démontrons à l'aide de l'équation fonctionnelle du paragraphe 3.

(4.1) Théorème. *Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$, *dont les composantes X_1, X_2 sont des variables aléatoires indépendantes. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle* (2, 2), *et supposons que les composantes du* *vecteur aléatoire* $Y = AX$, *c'est-à-dire les deux variables aléatoires réelles* Y_1, Y_2 *définies par*

$$\begin{cases} Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{cases},$$

soient elles aussi indépendantes. Alors, pour chaque indice i *tel que la i-ème colonne de* A *soit formée d'éléments non nuls, la loi de* X_i *est normale (éventuellement dégénérée).*

Pour rendre plus claire la démonstration, nous commencerons par démontrer un lemme préliminaire:

(4.2) Lemme. *Soit* X *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$, *de composantes* X_1, X_2, *et soit* Φ *sa fonction caractéristique. Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(a) (X_1, X_2) *est un couple de variables aléatoires indépendantes ;*

(b) *pour tout système de scalaires* s_1, s_2, u, v, *on a*

$$\Phi(s_1, s_2)\Phi(s_1+u, s_2+v) = \Phi(s_1+u, s_2)\Phi(s_1, s_2+v).$$

Démonstration du lemme.

Il suffit de démontrer (b) $\Rightarrow$ (a). Si l'on désigne par φ_i la fonction caractéristique de X_i, l'hypothèse (b) fournit (pour $s_1 = s_2 = 0$)

$$\Phi(u,v) = \Phi(u,0)\Phi(0,v) = \varphi_1(u)\varphi_2(v),$$

c'est-à-dire l'indépendance du couple (X_1, X_2).

Démonstration du théorème. Supposons, pour fixer les idées, que la première colonne de A soit formée d'éléments non nuls, et montrons que la loi de X_1 est normale. Quitte à multiplier chacune des lignes de A par un scalaire convenable, on pourra supposer

$$a_{11} = a_{21} = 1. \tag{4.3}$$

1) Supposons d'abord que la matrice A soit singulière. En vertu de notre hypothèse on a alors $Y_1 = Y_2$. Par conséquent Y_1 est indépendante d'elle même, c'est-à-dire p.s. égale à une constante:

$$Y_1 = X_1 + a_{12}X_2 = c \quad \text{p.s.};$$

il en résulte

$$X_1 = c - a_{12}X_2 \quad \text{p.s.},$$

de sorte que X_1 est également indépendante d'elle même, c'est-à-dire p.s. égale à une constante.

2) Supposons maintenant que la matrice A ne soit pas singulière, et désignons par φ_i la fonction caractéristique de X_i et par Φ celle de X:

$$\Phi(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1)\,\varphi_2(t_2)\,. \tag{4.4}$$

Désignons en outre par ψ la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $Y = AX$, c'est-à-dire la fonction définie par

$$\psi(s_1, s_2) = \Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22})\,. \tag{4.5}$$

En appliquant le lemme précédent au couple de variables aléatoires indépendantes (Y_1, Y_2), on trouve, pour tout système de scalaires s_1, s_2, u,

$$\psi(s_1, s_2)\,\psi(s_1 + u, s_2 - u) = \psi(s_1 + u, s_2)\,\psi(s_1, s_2 - u)\,.$$

Grâce à (4.5), cette relation s'écrit, en fonction de Φ,

$$\begin{aligned}&\Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22})\,\Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} + u a_{12} - u a_{22})\\ &= \Phi(s_1 + s_2 + u, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} + u a_{12})\,\Phi(s_1 + s_2 - u, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} - u a_{22})\,.\end{aligned}$$

Etant donné le scalaire t, choisissons maintenant s_1, s_2 de façon à satisfaire aux conditions

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = t \\ s_1 a_{12} + s_2 a_{22} = 0 \end{cases}$$

(ce qui est possible, car la matrice A n'est pas singulière). La relation précédente devient alors

$$\Phi(t, 0)\,\Phi\big(t, u(a_{12} - a_{22})\big) = \Phi(t + u, u a_{12})\,\Phi(t - u, -u a_{22})\,,$$

c'est-à-dire, grâce à (4.4),

$$\begin{aligned}&\varphi_1(t)\,\varphi_2(0)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2\big(u(a_{12} - a_{22})\big)\\ &= \varphi_1(t + u)\,\varphi_2(u a_{12})\,\varphi_1(t - u)\,\varphi_2(-u a_{22})\,.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Or, si $|u|$ est assez petit, on a $\varphi_2\big(u(a_{12} - a_{22})\big) \neq 0$, de sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(\varphi_1(t))^2 = \varphi_1(t + u)\,\varphi_1(t - u)\,\theta(u)\,. \tag{4.7}$$

Il en résulte, grâce à (3.1), que φ_1 est la fonction caractéristique d'une loi normale.

A titre d'exemple, nous analyserons l'énoncé (4.1) dans deux *cas particuliers.*

a) Supposons d'abord

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$. Si chacun des couples (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, le Théorème (4.1) permet d'affirmer que la variable aléatoire X_1 est normale (en revanche, on ne peut rien affirmer sur X_2). On peut d'ailleurs préciser que la variable aléatoire X_1 est dégénérée. Il suffit pour cela de remarquer que, dans le cas présent, l'équation (4.6) se réduit à la forme (4.7) avec $\theta(u) = 1$ (cf. (3.3)).

b) Supposons ensuite

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $Y_1 = X_1 \cos\omega - X_2 \sin\omega$, $Y_2 = X_1 \sin\omega + X_2 \cos\omega$. Si chacun des couples (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, *et si* ω *n'est pas un multiple entier de* $\pi / 2$, le Théorème (4.1) permet d'affirmer que chacune des variables aléatoires X_1, X_2 est normale (en revanche, si ω est un multiple entier de $\pi / 2$, on ne peut rien affirmer, ni sur X_1 ni sur X_2). On reconnaîtra ici un résultat ayant des analogies avec le Théorème (2.1).

Remarquons enfin que l'énoncé du théorème de Bernstein-Darmois tel qu'il figure dans [3] (pag. 77 et pag. 499) est incorrect. En effet il entraîne notamment que, dans les hypothèses du cas particulier a) ci-dessus, la variable aléatoire X_2 est normale, ce qui est manifestement faux (il suffit, pour s'en convaincre, de prendre X_1 constante et X_2 non normale).

5. Le théorème de Skitovitch-Darmois

Voici l'énoncé du théorème de Skitovitch-Darmois mentionné au paragraphe précédent:

(5.1) Théorème. *Soit* X *un vecteur aléatoire, à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$, *dont les composantes* $X_1, \ldots, X_n$ *sont indépendantes. Considérons les deux variables aléatoires* Y_1, Y_2 *définies par les relations*