5. Le théorème de Skitovitch-Darmois

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

A titre d'exemple, nous analyserons l'énoncé (4.1) dans deux *cas particuliers.*

a) Supposons d'abord

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$. Si chacun des couples (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, le Théorème (4.1) permet d'affirmer que la variable aléatoire X_1 est normale (en revanche, on ne peut rien affirmer sur X_2). On peut d'ailleurs préciser que la variable aléatoire X_1 est dégénérée. Il suffit pour cela de remarquer que, dans le cas présent, l'équation (4.6) se réduit à la forme (4.7) avec $\theta(u) = 1$ (cf. (3.3)).

b) Supposons ensuite

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $Y_1 = X_1 \cos\omega - X_2 \sin\omega$, $Y_2 = X_1 \sin\omega + X_2 \cos\omega$. Si chacun des couples (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, *et si* ω *n'est pas un multiple entier de* $\pi / 2$, le Théorème (4.1) permet d'affirmer que chacune des variables aléatoires X_1, X_2 est normale (en revanche, si ω est un multiple entier de $\pi / 2$, on ne peut rien affirmer, ni sur X_1 ni sur X_2). On reconnaîtra ici un résultat ayant des analogies avec le Théorème (2.1).

Remarquons enfin que l'énoncé du théorème de Bernstein-Darmois tel qu'il figure dans [3] (pag. 77 et pag. 499) est incorrect. En effet il entraîne notamment que, dans les hypothèses du cas particulier a) ci-dessus, la variable aléatoire X_2 est normale, ce qui est manifestement faux (il suffit, pour s'en convaincre, de prendre X_1 constante et X_2 non normale).

5. Le théorème de Skitovitch-Darmois

Voici l'énoncé du théorème de Skitovitch-Darmois mentionné au paragraphe précédent:

(5.1) Théorème. *Soit* X *un vecteur aléatoire, à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$, *dont les composantes* $X_1, \ldots, X_n$ *sont indépendantes. Considérons les deux variables aléatoires* Y_1, Y_2 *définies par les relations*

$$\begin{cases} Y_1 = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \\ Y_2 = b_1 X_1 + \dots + b_n X_n \end{cases}.$$

où les coefficients a_i, b_i *sont des scalaires donnés. Si les variables aléatoires* Y_1, Y_2 *sont elles mêmes indépendantes, alors, pour chaque indice* i *tel que* $a_i b_i \neq 0$, *la loi de* X_i *est normale (éventuellement dégénérée).*

Ce théorème est bien plus profond que celui de Bernstein-Darmois (auquel il se réduit pour $n = 2$). Il permet en effet de démontrer directement le théorème de Cramér-Lévy, ainsi que certains résultats de α-factorisation. [1])

Il n'est donc pas étonnant que toutes les démonstrations connues du théorème de Skitovitch-Darmois fassent appel à des résultats profonds de la théorie des fonctions caractéristiques analytiques (théorème de Marcinkiewicz, théorèmes de α-factorisation). Voici en revanche une généralisation du théorème de Bernstein-Darmois qu'on peut obtenir par nos méthodes d'équations fonctionnelles.

(5.1) THÉORÈME. *Soit* X *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 2)$, *dont les composantes* $X_1, \dots, X_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes. Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice réelle* (n, n) *non singulière, et supposons que les composantes du vecteur aléatoire* $Y = AX$ *sont également indépendantes.*

Alors, pour chaque indice i *tel que la* i*-ème colonne de* A *possède au moins deux éléments non nuls, la loi de* X_i *est normale (éventuellement dégénérée).*

Pour rendre plus claire la démonstration, nous commencerons par démontrer un lemme préliminaire:

(5.2) LEMME. *Soit* X *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 2)$. *dont les composantes* $X_1, \dots, X_n$ *(par rapport à la base canonique* $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ *de* $\mathbf{R}^n$*) sont des variables aléatoires indépendantes* [2]). *Alors la fonction caractéristique* Φ *de* X *vérifie la relation*

$$\Phi(\mathbf{s})\,\Phi(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2) = \Phi(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_1)\,\Phi(\mathbf{s}+v\mathbf{e}_2)$$

pour tout vecteur $\mathbf{s}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *et pour tout couple* (u, v) *de scalaires.*

---

[1]) Voici,par exemple, comment on peut en déduire le théorème de Cramér-Lévy (cf. [4], pag. 193). Soit λ, μ un couple de lois de probabilité sur $\mathbf{R}$, dont le produit de convolution est une loi normale; prenons un système de quatre variables aléatoires indépendantes X, X', Y, Y' tel que les lois de X et de X' coïncident avec λ et celles de Y et de Y' avec μ. Les deux variables aléatoires $(X + Y) + (X' + Y')$, $(X + Y) - (X' + Y'$ sont alors normales, non correlées, donc indépendantes. En appliquant le théorème de Skitovitch-Darmois pour $n = 4$, on en déduit que chacune des lois λ, μ est normale.

[2]) En fait, il suffirait de supposer que le triplet formé de X_1, X_2 et du système $(X_3, \dots, X_n)$ est indépendant.

Démonstration du lemme. Désignons par φ_i la fonction caractéristique de X_i et par s_i la i-ème composante du vecteur $\mathbf{s}$ (par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^n$). On a alors

$$\Phi(\mathbf{s}) = \varphi_1(s_1)\varphi_2(s_2)\prod_{i=3}^{n}\varphi_i(s_i),$$

$$\Phi(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2) = \varphi_1(s_1+u)\varphi_2(s_2+v)\prod_{i=3}^{n}\varphi_i(s_i),$$

$$\Phi(\mathbf{s})+u\mathbf{e}_1) = \varphi_1(s_1+u)\varphi_2(s_2)\prod_{i=3}^{n}\varphi_i(s_i);$$

$$\Phi(\mathbf{s}+v\mathbf{e}_2) = \varphi_1(s_1)\varphi_2(s_2+v)\prod_{i=3}^{n}\varphi_i(s_i),$$

d'où la conclusion.

Démonstration du théorème. Supposons que la première colonne de A possède deux éléments non nuls, et montrons que la loi de X_1 est normale. On pourra supposer, par exemple, $a_{11} \neq 0$ et $a_{21} \neq 0$. Quitte à multiplier chacune des deux premières lignes de A par un scalaire convenable, on pourra même supposer

$$a_{11} = a_{21} = 1. \tag{5.3}$$

Désignons par L l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même dont la matrice, par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^n$, est la transposée de A. On a donc, pour tout i,

$$L\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i, \tag{5.4}$$

où $\mathbf{a}_i$ désigne le vecteur $(a_{i1}, \dots a_{in})$.

Désignons en outre par φ_i la fonction caractéristique de X_i et par Φ celle de X:

$$\Phi(t_1, \dots, t_n) = \varphi_1(t_1)\dots\varphi_n(t_n). \tag{5.5}$$

Le vecteur aléatoire $Y = AX$ admet alors comme fonction caractéristique la fonction composée $\psi = \Phi \circ L$. En lui appliquant le lemme précédent, on trouve, pour tout scalaire u et pour tout vecteur $\mathbf{s}$ de $\mathbf{R}^n$,

$$\psi(\mathbf{s})\psi(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_1-u\mathbf{e}_2) = \psi(\mathbf{s}+u\mathbf{e}_1)\psi(\mathbf{s}-u\mathbf{e}_2),$$

c'est-à-dire

$$\Phi(L\mathbf{s})\Phi(L\mathbf{s}+u\mathbf{a}_1-u\mathbf{a}_2) = \Phi(L\mathbf{s}+u\mathbf{a}_1)\Phi(L\mathbf{s}-u\mathbf{a}_2).$$

Etant donné le scalaire t, appliquons cette relation au vecteur $\mathbf{s}$ déterminé par $L\mathbf{s} = t\mathbf{e}_1$ (un tel vecteur existe puisque la matrice de L est régulière). On obtient

$$\Phi(t\mathbf{e}_1)\Phi\big(t\mathbf{e}_1 + u(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\big) = \Phi(t\mathbf{e}_1 + u\mathbf{a}_1)\Phi(t\mathbf{e}_1 - u\mathbf{a}_2),$$

c'est-à-dire, grâce à (5.5) et (5.3),

$$(5.6) \qquad \varphi_1(t)\varphi_1(t)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i\big(u(a_{1i} - a_{2i})\big)$$
$$= \varphi_1(t+u)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i(ua_{1i})\varphi_1(t-u)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i(-ua_{2i}).$$

Or, si $|u|$ est assez petit, on a $\varphi_i\big(u(a_{1i} - a_{2i})\big) \neq 0$ pour tout i, de sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(5.7) \qquad \big(\varphi_1(t)\big)^2 = \varphi_1(t+u)\varphi_1(t-u\,\theta(u).$$

Il en résulte, grâce à (3.1), que φ_1 est la fonction caractéristique d'une loi normale.

6. Retour sur les équations fonctionnelles des paragraphes précédents

Dans l'étude des équations fonctionnelles des paragraphes précédents, nous nous étions systématiquement bornés à rechercher les solutions dans l'ensemble des fonctions caractéristiques. Nous nous proposons maintenant d'étudier ces mêmes équations (ou des équations analogues) dans l'ensemble de toutes les fonctions complexes continues définies dans $\mathbf{R}$.

Nous commencerons par l'équation fonctionnelle

$$(6.1) \qquad \big(f(t)\,|f(u)|\big)^2 = f(t+u)f(t-u),$$

qui se réduit manifestement à l'équation (3.2) dans le cas où f est une fonction caractéristique.

(6.2) Théorème. *Soit f une application continue de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$, *telle que* $f(0) = 1$.

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f *vérifie la relation* (6.1) *pour tout couple* t, u *de nombres réels ;*