

# APPENDIX — SIMPLICITY PROPERTIES OF FIBERS

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

where  $N = \ker(\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y))$ . By (6.6) the map  $\beta_i$  is  $i$ -connected since the fiber of the two vertical arrows is  $A(P_n \tilde{X})_N$ . Now by (5.4) we see that  $\alpha_i$  is simple for  $k > i$ .

For two decompositions  $(X'_i)$  and  $(X''_i)$  of  $f : X \rightarrow Y$  satisfying the above conditions, we have  $P_i X'_i = P_i X''_i$  and both  $X'_i$  and  $X''_i$  map into  $X_i$ , constructed above, such that the resulting diagrams are homotopy commutative. The connectivity of the  $\beta_i$  and (5.1) shows that these maps are all homotopy equivalences. This proves the theorem.

(6.8) *Remarks.* This theorem (6.7) coincides with the Dror results for  $Y$  a point [D1, Theorem 1.3] and  $Y = S^n$  [D2]. An interesting problem is to describe the  $i$ th stage  $X_i$  in terms of invariants of  $X_{i-1}$  as in [D1] and [D2]. (See the footnote in the introduction.)

#### APPENDIX — SIMPLICITY PROPERTIES OF FIBERS

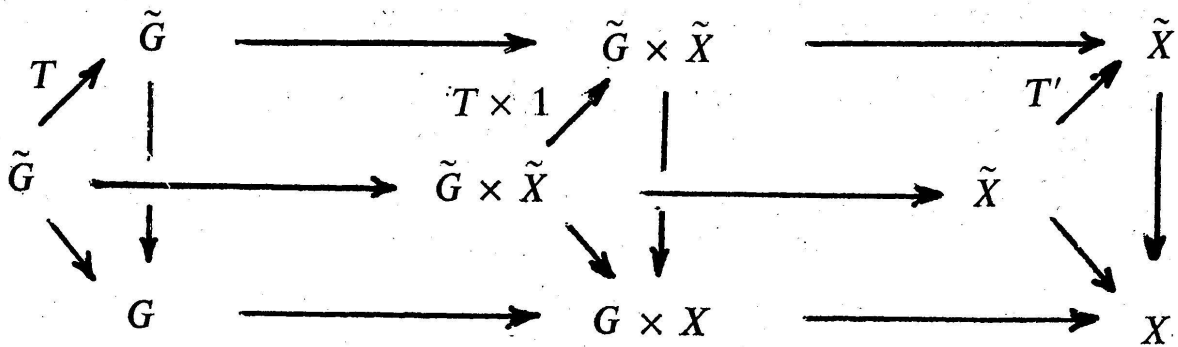
In the proof of (5.4) we used the fact that for a fibration  $F \rightarrow E \xrightarrow{f} B$  the action of  $\pi_1(F)$  on  $\text{Im}(\partial : \pi_{k+1}(B) \rightarrow \pi_k(F))$  is trivial. This assertion does not seem to be in the literature so we include a proof here.

We extend the mapping sequence of the fibration  $f$  to  $\Omega B \rightarrow F \rightarrow E \xrightarrow{f} B$  and study  $F$  as the total space of a principal fibration with fibre the  $H$ -space  $\Omega B$ . If  $G$  is an  $H$ -space, then  $\pi_1(G)$  acts trivially on  $\pi_*(G)$  because the covering transformations  $\tilde{G} \rightarrow G$  on the universal covering  $\tilde{G}$  of  $G$  are homotopic to the identity. This is proved by lifting a loop to a path in  $\tilde{G}$  and using the  $H$ -space structure on  $\tilde{G}$  to deform the identity along this path to the covering transformation defined by the homotopy class of the loop. Recall that a principal fibration is induced from  $G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$  up to fibre homotopy equivalence.

(A.1) PROPOSITION. *Let  $G \rightarrow X \xrightarrow{\pi} Y$  be a principal fibration with fibre  $G$  acting on  $X$ . Then we have:*

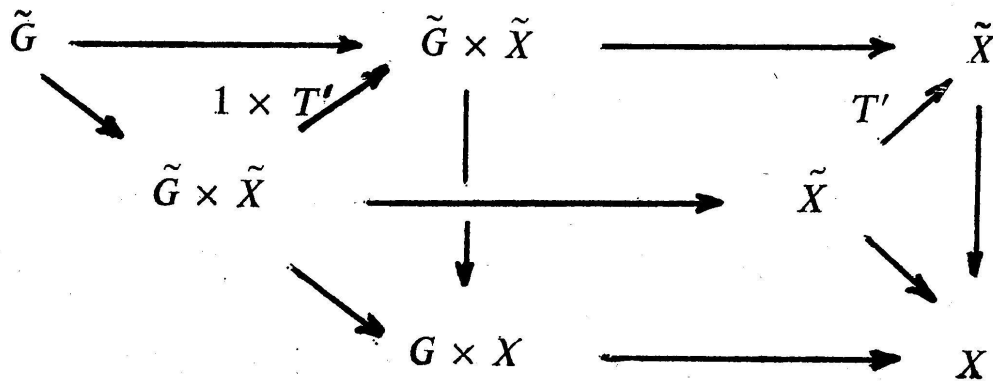
- (a)  $\text{im}(\pi_1(G) \rightarrow \pi_1(X))$  acts trivially on  $\pi_*(X)$ , and
- (b)  $\pi_1(X)$  acts trivially on  $\text{im}(\pi_*(G) \rightarrow \pi_*(X))$ .

*Proof.* For (a) we have the following commutative diagram induced by a covering transformation  $T : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ .



The covering transformation  $T$  defines  $T'$ , and since  $T$  is homotopic to the identity so is  $T'$ . This proves (a).

For (b) we use the following commutative diagram where  $T'$  is any covering transformation of  $\tilde{X}$ .



Now the inclusion  $i : \tilde{G} \rightarrow \tilde{X}$  is the composite of the first horizontal row, and  $T'i$  and  $i$  are homotopic by  $i_t(g) = g \cdot \tilde{\alpha}(t)$  where  $g \in G$  and  $\alpha$  is a lifting of the loop  $\alpha$  corresponding to the covering transformation  $T'$ . This proves the proposition.

For a general fibration  $f : E \rightarrow B$  with fibre  $F$  the mapping sequence  $\Omega B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B$  allows us to deduce the next proposition from the previous one.

(A.2) PROPOSITION. *Let  $f : E \rightarrow B$  be a fibration with fibre  $F \rightarrow E$ . Then we have :*

- (a)  $\text{im}(\pi_2(B) \rightarrow \pi_1(F))$  acts trivially on  $\pi_*(F)$ , and
- (b)  $\pi_1(F)$  acts trivially on  $\text{im}(\partial : \pi_{i+1}(B) \rightarrow \pi_i(F))$ .