

## 4. Absolutely isolated double points

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

functions  $f$  listed in column 1 of Table 1 have minimal resolutions as in column 3. (I believe that this first appeared in [Hirzebruch 1].) The converse follows since the singularities listed are taut [Brieskorn 2; Tjurina 3; Laufer 4]. (Two resolutions  $\pi: M \rightarrow V$  and  $\pi': M' \rightarrow V'$  are *topologically equivalent* if their exceptional sets are homeomorphic by a homeomorphism preserving the self-intersection numbers. A singularity  $V$  is *taut* if any other singularity with a good resolution topologically equivalent to a good resolution of  $V$  is then isomorphic to  $V$ .)

The classification of rational double points has been generalized in several ways: to rational triple points [Artin, p. 135], to elliptic singularities [Wagreich 1], and to minimally elliptic singularities [Laufer 5]. The Dynkin diagrams  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $F_4$  and  $G_2$  occur when resolving singularities over non-algebraically closed fields [Lipman 1]. There is also a relation with simple complex Lie groups [Brieskorn 3].

#### 4. ABSOLUTELY ISOLATED DOUBLE POINTS

There are at least three methods of resolving the singularity of the germ of a normal two-dimensional complex space  $V$ . The first method is one of local uniformization; this is originally due to Jung, and is described in detail in [Laufer 1]. The second method, due to Zariski, is to alternately blow up points and normalize. The third method (which generalizes to higher dimensions), is to blow up points and non-singular curves.

The singularity of  $V$  is *absolutely isolated* if it may be resolved by blowing up points alone, that is, it is not necessary to normalize or blow up curves. For example, the singularity of the zero locus of  $f(x, y, z) = x^k + y^k + z^k$  is absolutely isolated, since it may be resolved by blowing up the origin once.

The singularity of  $V$  is a *double point* if its local ring is of multiplicity two. If  $V$  is  $f^{-1}(0)$ , this is equivalent to the lowest non-zero homogeneous term in the power series expansion of  $f$  being quadratic.

*Characterization A4.* The singularity of  $f^{-1}(0)$  is an absolutely isolated double point.

The equivalence of Characterizations A1 and A4 was proved directly in [Kirby]. Later, it was shown [Tjurina 2; Lipman 1] that all rational singularities are absolutely isolated (thus showing Characterization A2 implies A4), and in [Brieskorn 1, Satz 1] that A4 implies A3.