

14. Vanishing cycles

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

14. VANISHING CYCLES

Let f be a germ in \mathcal{F} , and let \bar{f} be a nearby Morse function with μ distinct critical values t_1, \dots, t_μ in the disk D_δ^2 of radius δ about 0 in \mathbb{C} . A path α_i in $D_\delta^2 - \{t_1, \dots, t_\mu\}$ from δ to t_i determines (up to sign) a *vanishing cycle* δ_i in $H_n(F)$. The self-intersection (δ_i, δ_i) is $2(-1)^{n/2}$ or 0 according as n is even or odd. Choose paths $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ in $D_\delta^2 - \{t_1, \dots, t_\mu\}$ from δ to t_1, \dots, t_μ respectively, such that the union of the images of the paths is a deformation retract of D_δ^2 ; then the corresponding vanishing cycles $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ are a basis of $H_n(F)$ [Brieskorn 4, Appendix]. The basis $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ is called an *ordered* (or *distinguished*) *basis of vanishing cycles* if t_1, \dots, t_μ are ordered so that the loop going once counter-clockwise around the boundary of D_δ^2 is homotopic in $\pi_1(D_\delta^2 - \{t_1, \dots, t_\mu\}, \delta)$ to the product $\beta_1 * \dots * \beta_\mu$, where β_i is the loop going out α_i almost to t_i , around t_i counter-clockwise, and back along α_i . References for this are [Gabrielov 1, Lamotke, Durfee 1].

Choose an ordered basis of vanishing cycles $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ for the intersection pairing $(,)$ of $f(z_0, \dots, z_n) + z_{n+1}^2 + \dots + z_m^2$, where $m \equiv 2 \pmod{4}$. The *quadratic form diagram* of f with respect to the basis $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ has vertices v_1, \dots, v_μ and edges from v_i to v_j if $(\delta_i, \delta_j) \neq 0$, weighted by (δ_i, δ_j) if $(\delta_i, \delta_j) \neq 1$. This diagram is connected [Lazzeri; Gabrielov 2]. It determines all the topological information in the singularity if $n \neq 2$ [Durfee 1]. There are a number of methods of computing these diagrams [A'Campo 2I; Gabrielov 3; Gusein-Zade]. The quadratic form diagrams of the germs of Table 2 are listed in column 5. Lemma 12.1 can be strengthened to show that if f topologically degenerates to g , then some quadratic form diagram for f is a subdiagram of some quadratic form diagram for g [Siersma, p. 82].

Characterization B7. There is an ordered basis of vanishing cycles for f such that the quadratic form diagram is a (weighted) tree.

It is shown in [A'Campo 2II] that Characterizations B1 and B7 are equivalent. In fact, the quadratic form diagrams for the germs in Table 2a are the same as the graph of their minimal resolutions (column 3 of Table 1).

15. THE MONODROMY GROUP

Let f be a germ in \mathcal{F} , and as above choose an ordered basis $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ of vanishing cycles for $H_m(F)$, where F is the Milnor fiber of

$$f(z_0, \dots, z_n) + z_{n+1}^2 + \dots + z_m^2$$