1.1. Une famille de polynômes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Dans le troisième paragraphe, nous donnons la loi de décomposition des nombres premiers dans ces corps non galoisiens.

Enfin, dans le quatrième paragraphe, nous établissons les propriétés de divisibilité des nombres de classes annoncées au début en construisant des corps tchébychéviens dont les clôtures galoisiennes sont des extensions abéliennes non ramifiées de degré l de certains corps cycliques de degré $l - 1$. Les paragraphes 2, 3 et 4 sont essentiellement indépendants; seuls quelques lemmes établis au paragraphe 2 servent dans les paragraphes 3 et 4.

L'idée d'étudier les corps tchébychéviens m'a été donnée par Pierre Barrucand; les trois premiers paragraphes de ce travail ont été élaborés avec lui; je tiens à le remercier ici.

0) Notations

Nous désignons par n un nombre positif impair (dans les parties 2), 3) et 4) ce n sera supposé premier, nous poserons alors $n = l$), par K le corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ où d est sans carré, par δ le discriminant de K et par ξ et $\bar{\xi}$ deux entiers conjugués (non rationnels) de K tels que $\xi\bar{\xi} = M^n$ où M est un entier rationnel. Nous choisissons une racine n-ième de ξ que nous notons $\sqrt[n]{\xi}$ et nous posons $\sqrt[n]{\bar{\xi}} = M/\sqrt[n]{\xi}$, $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ et $L = \mathbf{Q}(\omega, \sqrt{d(\omega^2 - 1)})$. Pour tout entier positif k, nous posons

$$t_k = (\sqrt[n]{\xi})^k + (\sqrt[n]{\bar{\xi}})^k, \quad t^{(k)} = \zeta^k \sqrt[n]{\xi} + \zeta^{-k} \sqrt[n]{\bar{\xi}},$$

$T^{(k)} = \mathbf{Q}(t^{(k)})$, $t = t^{(0)}$ et $T = T^{(0)}$. Nous désignons par N la clôture galoisienne de T. Enfin, si A est un anneau, A^n est le semi-groupe des puissanceses n-ièmes des élémentsde A et A^* est le groupe des éléments inversibles de A.

1) Etude générale

1.1. *Une famille de polynômes*

Pour tout entier positif k, nous désignons par $T_k(X)$ le polynôme vérifiant $T_k(e^z + e^{-z}) = e^{kz} + e^{-kz}$ (c'est-à-dire, à une légère modification près, le k-ième polynôme de Tchébychev de 1ère espèce). On a $T_0(X) = 2$, $T_1(X) = X$ et $T_k(X) = XT_{k-1}(X) - T_{k-2}(X)$.

Posons $P_k(X; M) = M^{k/2} T_k(X/\sqrt{M})$. On vérifie que, pour $k > 0$, les $P_k(X; M)$ sont des polynômes unitaires de degré k à coefficients entiers, que $P_0(X; M) = 2$, que $P_1(X; M) = X$ et que $P_k(X; M) = XP_{k-1}(X; M) - MP_{k-2}(X; M)$.

LEMME 1.1.1. *Pour tout entier positif* k, *on a* $P_k(t; M) = t_k$.

Démonstration. Soit z un nombre complexe tel que $e^z = \sqrt[n]{\xi}/\sqrt{M}$, alors $e^z + e^{-z} = t/\sqrt{M}$ et donc $P_k(t; M) = M^{k/2} T_k(t/\sqrt{M}) = M^{k/2}(e^{kz} + e^{-kz}) = t_k$.

Soit $tr(\xi) = \xi + \bar{\xi}$; le lemme précédent appliqué avec $k = n$ montre que $P_n(t, M) - tr(\xi) = 0$. De même, pour tout j on a $P_n(t^{(j)}; M) - tr(\xi) = 0$. On voit facilement que les $t^{(j)}$ sont distincts deux à deux (car ξ n'est pas rationnel), ce sont donc les n racines de $P_n(X; M) - tr(\xi)$. De cela on déduit le lemme suivant:

LEMME 1.1.2. ξ *est une puissance* n-ième *dans* K *si et seulement si le polynôme* $P_n(X; M) - \mathrm{tr}(\xi)$ *admet une racine rationnelle* qui permet très simplement de savoir si ξ est une puissance n-ième dans K. Enfin on a le critère d'irréductibilité suivant:

PROPOSITION 1.1.3. *Le polynôme* $P_n(X; M) - \mathrm{tr}(\xi)$ *est irréductible si et seulement si, pour aucun diviseur premier* l *de* n, *le polynôme* $P_l(X; M^{n/l}) - \mathrm{tr}(\xi)$ *n'a de racines rationnelles.*

Démonstration. Notre polynôme est irréductible si et seulement si le corps $T = \mathbf{Q}(t)$ est de degré n sur $\mathbf{Q}$. Mais, n étant impair, T est de degré n sur $\mathbf{Q}$ si et seulement si $K(\sqrt[n]{\xi})$ est une extension de degré n sur K. Cela équivaut à ce que, pour aucun diviseur premier l de n, le nombre ξ n'est une puissance l-ième dans K; on conclut à l'aide du lemme précédent.

1. 2. *Les corps tchebycheviens*

DÉFINITION 1. 2. 1. Le corps T obtenu par le procédé précédent est dit tchebychevien si il est de degré n sur $\mathbf{Q}$. Dans ce cas on dira que T est le corps tchebychevien associé à ξ ou que ξ est un entier quadratique définissant le corps tchebychevien T.