2.1. La formule

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

différent de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ où si 3 ne divise pas n, alors Gal $(N/\mathbf{Q})$ est un sous-groupe d'indice 2 du groupe précédent.

Enfin, si ξ_1 et ξ_2 sont deux entiers de K dont les normes sont les puissances n-ièmes de rationnels mais qui, pour aucun diviseur premier l de n, ne sont des puissances l-ièmes dans K, on a la proposition suivante:

Proposition 1.2.5. *Les corps* T_1 *et* T_2 *coïncident si et seulement si* $\xi_1 = \xi_2^k \eta^n$ *où* k *est un entier premier à* n *et où* η *est un élément de* K.

Démonstration. Si $T_1 = T_2$, on voit facilement que $K(\zeta, \sqrt[n]{\xi_1}) = K(\zeta, \sqrt[n]{\xi_2})$ et donc (théorie de Kummer) $\xi_1 = \xi_2^k \psi^n$ où k est un entier premier à n et où ψ est un élément de $K(\zeta)$. On sait ([6] par exemple) que cela implique une égalité $\xi_1 = \xi_2^k \eta^n$ avec η dans K. Réciproquement, si $\xi_1 = \xi_2^k \eta^n$, on a $\sqrt[n]{\xi_1} + \sqrt[n]{\bar{\xi}_1} = \eta \sqrt[n]{\xi_2^k} + \bar{\eta} \sqrt[n]{\bar{\xi}_2^k}$. Posons $\eta = \alpha + \beta\sqrt{d}$, il vient $\sqrt[n]{\xi_1} + \sqrt[n]{\bar{\xi}_1} = \alpha(\sqrt[n]{\xi_2^k} + \sqrt[n]{\bar{\xi}_2^k}) + \beta\sqrt{d}(\sqrt[n]{\xi_2^k} - \sqrt[n]{\bar{\xi}_2^k})$. Les lemmes 1.1.1 et 1.2.2 montrent que $\sqrt[n]{\xi_2^k} + \sqrt[n]{\bar{\xi}_2^k}$ et $\sqrt{d}(\sqrt[n]{\xi_2} - \sqrt[n]{\bar{\xi}_2^k})$ sont dans T_2, donc que T_1 est inclus dans T_2; ces corps ayant même degré, on a $T_1 = T_2$. C.Q.F.D.

Remarque 1.2.6. Si $n = 3$, les formules de Cardan montrent que les corps tchebycheviens coïncident avec les corps cubiques non purs (un corps pur étant un corps du type $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{m})$ avec m rationnel).

2) Le calcul du discriminant

Nous supposons maintenant que n est premier (impair); pour souligner cette hypothèse nous posons $n = l$. Nous allons calculer le discriminant Δ du corps T. Comme on pourra le constater sur la formule, ce discriminant n'est pas, en général, le discriminant du polynôme définissant T. La formule est donnée dans le premier paragraphe.

2.1. *La formule*

Nous supposerons dans toute cette partie que l'entier quadratique ξ n'est divisible par la puissance l-ième d'aucun idéal premier de K qui divise l;

tous les corps tchebycheviens sont obtenus à l'aide de tels entiers (en effet, l'idéal principal engendré par ξ s'écrit $a^l b$ où a et b sont des idéaux entiers et où b n'est divisible par la puissance l-ième d'aucun idéal premier; choisissons dans la classe de a un idéal c premier à l et désignons par α un générateur de $a^{-1}c$; le nombre $\xi\alpha^l$ est un entier de K qui n'est divisible par la puissance l-ième d'aucun idéal premier contenant l et le corps tchebychevien défini par cet entier est celui défini par ξ). Pour énoncer la formule du discriminant, nous aurons besoin de quelques préliminaires. Pour tout entier i, on définit les entiers rationnels a_i et b_i par l'égalité $\xi^i = \frac{1}{2}(a_i + b_i\sqrt{d})$; on a alors le lemme suivant:

Lemme 2.1.1. *On suppose que* l *ne divise pas la norme de* ξ, *alors*

I) *il existe un entier* τ *premier à* l *tel que* l *divise le produit* $b_\tau d$ *(et on peut toujours trouver un tel* τ *divisant* $l - (\frac{d}{l})$*))*

II) *si, pour un entier* τ *premier à* l, *le produit* $b_\tau d$ *est divisible par* l^2, *alors pour tout entier* i *premier à* l, *le produit* $b_i d$ *est divisible par* l^2 *dès qu'il est divisible par* l.

Démonstration

I) Si l divise d, c'est clair. Si $(\frac{d}{l}) = 1$, alors ξ^{l-1} est congru à 1 modulo l i.e. $\xi^{l-1} = 1 + l\,\frac{\alpha + \beta\sqrt{d}}{2}$ avec α et β entiers rationnels. On a donc $b_{l-1} = l\beta$ c'est-à-dire que l divise b_{l-1}. De même si $(\frac{d}{l}) = -1$, alors ξ^{l+1} est congru à un entier rationnel modulo l et le même raisonnement montre que l divise b_{l+1}.

II) Soit τ un entier premier à l tel que l divise $b_\tau d$. Il est facile de voir que l^2 divise $b_\tau d$ si et seulement si ξ^τ est congru à un entier rationnel modulo le carré d'un idéal premier de K au-dessus de l. On conclut en remarquant qu'alors, pour tout entier i premier à l tel que ξ^i est congru à un rationnel modulo l, cet entier quadratique ξ^i est congru à un rationnel modulo l^2.

On définit j de la manière suivante: on pose $j = 1$ si l ne divise pas la norme de ξ et si, pour les entiers i premiers à l, le produit $b_i d$ est divisible par l^2 dès qu'il est divisible par l et on pose $j = 0$ sinon. De plus si c est le plus grand entier naturel divisant ξ et si $c = c_1 c_2^l$ où c_1 est sans puissance l-ième, on pose $g = \prod_{\substack{p \mid c_1 \\ \left(\frac{d}{p}\right) = 1}} p$. Enfin on pose $\lambda = \frac{l-1}{2}$ ou $\frac{l+1}{2}$ suivant que l est congru à 1 ou à 3 modulo 4 et on désigne par (l, d) le p.g.c.d de l et de d. Le discriminant Δ de T est alors donné par la formule suivante:

$$|\Delta| = \frac{l^{l-2j} \, |\delta|^{(l-1)/2} \, g^{l-1}}{(l, d)^{j\lambda}} \tag{2.1.2}$$

(On rappelle que δ est le discriminant du corps $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$).

2.2. *Démonstration de la formule*

Rappelons qu'un élément ξ de K est dit l primaire si il est étranger à l et si l'extension de Kummer $K(\zeta, \sqrt[l]{\xi})/K(\zeta)$ est non ramifiée au-dessus de l. On a alors la proposition suivante:

PROPOSITION 2.2.1. *L'entier j étant celui défini au paragraphe précédent, on a $j = 1$ ou 0 suivant que ξ est ou n'est pas l-primaire.*

Démonstration. Pour plus de concision, nous supposerons dans cette démonstration que le corps K n'est pas inclus dans $\mathbf{Q}(\zeta)$; le cas où K est inclus dans $\mathbf{Q}(\zeta)$ se traite de façon analogue. Nous désignons par $\mathfrak{L}$ un idéal premier de $K(\zeta)$ au dessus de l et par $\mathfrak{l}$ l'intersection de $\mathfrak{L}$ et de K. On vérifie que l'indice de ramification de $\mathfrak{L}$ sur $\mathbf{Q}$ est $l - 1$, donc ([7], § 39, satz 118-119; [8]) ξ est l-primaire si et seulement si il existe dans $K(\zeta)$ un élément x tel que l'on ait la congruence suivante:

(*) $\quad \xi \equiv x^l \pmod{\mathfrak{L}^l}$.