Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CORPS RÉSOLUBLES ET DIVISIBILITÉ DE NOMBRES DE CLASSES D'IDÉAUX

Autor: Satgé, Ph.

Kapitel: 4.3. Le cas l > 3

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50376

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORÈME 4.2.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre de classes d'un corps quadratique soit divisible par* 3 *est que ce corps soit de la forme* $\mathbf{Q}(\sqrt{-3(x^2-4z^3)})$ *où* x *et* z *sont deux entiers rationnels non nuls, tels que les p.g.c.d.* $(z, 2l)$ *et* (x, z) *sont égaux à* 1, *que* $x^2 - 4z^3$ *est divisible par* 27 *et n'est pas un carré et que le polynôme* $X^3 - 3zX -$ *n'a pas de racines rationnelles.*

Démonstration. Soit L un corps quadratique. Le nombre de classe de L est divisible par 3 si et seulement si L possède des extensions abéliennes non ramifiées de degré 3. Comme on l'a remarqué ci-dessus, une telle extension est la clôture galoisienne d'un corps tchébychévien. Supposons donc que L possède une telle extension et notons T le corps tchébychévien dont elle est la clôture galoisienne. Désignons par d l'entier sans carré tel que $L = \mathbf{Q}(\sqrt{-3d})$ (d existe puisque $L \neq \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$). Le théorème 4.1.1. affirme l'existence d'un entier ξ de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ dont la norme est le cube d'un rationnel impair M, qui définit T et qui vérifie les conditions 1), 2) et 3) de cette proposition. Ecrivons $\xi = \frac{1}{2}(a+b\sqrt{d})$ et posons $x = a$ et $z = M$; on vérifie facilement que $L = \mathbf{Q}(\sqrt{-3(x^2-4z^3)}$ et que x et z vérifient toutes les conditions de notre proposition, Réciproquement, soient x et z vérifiant toutes les conditions de notre proposition; nous posons $x^2 - 4z^3 = b^2d$ avec d sans carré. L'entier quadratique $\xi = \frac{1}{2}(x+b\sqrt{d})$ vérifie les conditions 1), 2) et 3) du théorème 4.1.1 donc la clôture galoisienne du corps tchébychévien associé à ξ est une extension abélienne non ramifiée de degré 3 de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3d})$ i.e de $Q(\sqrt{-3(x^2-4z^3)})$; le nombre de classe de ce corps quadratique est donc divisible par 3 ce qui achève la démonstration.

4.3. *Le cas* $l > 3$

On rappelle que ω est $\cos\frac{2\pi}{l}$. Le corps L est le corps $\mathbf{Q}(\omega, \sqrt{d(\omega^2-1)})$; c'est une extension quadratique du sous-corps réel maximal du corps des racines l-ième de l'unité. On n'a pas dans ce cas de résultat aussi précis que celui du théorème 4.2.2, mais le théorème 4.1.1 permet de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 4.3.1. *Soient* x *et* z *deux entiers rationnels non nuls tels que* $(z, 2l) = (x, z) = 1$, *que* $x^2 - 4z^l$ *est divisible par* l^3 *et n'est pas un carré et que le polynôme* $P_l(X; z) - x$ *n'a pas de racines rationnelles, alors* l *divise le nombre de classe du corps* $\mathbf{Q}\left(\omega, \sqrt{(x^2-4z^l)(\omega^2-1)}\right)$.

Démonstration. Analogue à la partie correspondante (dans le cas $l = 3$) du théorème 4.2.2.

Terminons ce travail par une illustration numérique. Prenons $l = 5$; le corps L est alors $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right) d}\right)$ et l^3 est 125. — Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 5. — Nous prenons $z = \pm p$. — Dans les deux cas z est un carré modulo 5, donc aussi modulo 125, et $4z^5$ est un carré modulo 125. — Choisissons alors x tel que, d'une part, x^2 soit congru à $4z^5$ modulo 125 et que, d'autre part, x ne soit pas une puissance 5-ième modulo p (de tels x existent puisque 125 et p sont premiers entre eux). — Le polynôme $P_5(X; z)$ est $X^5 - 5zX^3 + 5z^2X$; en réduisant modulo p, on voit que l'équation $P_5(X; z) - x$ n'a pas de racines rationnelles. — En conséquence, pour un tel x et un tel z, le nombre de classes du corps $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2-4z^5)}\right)$ est divisible par 5 dès que $x^2 - 4z^5$ n'est pas un carré.

En se servant, comme le fait Honda [3], d'un théorème de Mordell (ou de celui de Thue [9], chap. 28, qui est suffisant), on peut voir qu'il y a une infinité de corps réels et une infinité de corps imaginaires du type $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2-4z^5)}\right)$ dont le nombre de classes est divisible par 5. — En effet il suffit pour le voir de remarquer que, si l'on pose $x^2 - 4z^5 = y^2\delta$ avec δ sans carré, alors, en faisant varier x et z assujettis aux conditions décrites ci-dessus, on obtient une infinité de δ positifs et une infinité de δ négatifs (δ positif correspond à un corps imaginaire et δ négatif à un corps réel puisque $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ est négatif). — En fait on fixe un x qui n'est pas une puissance 5-ième et on montre que l'on obtient déjà l'infinité de δ cherchée avec cette valeur de x. — Désignons par ζ une racine 25-ième de l'unité et consi-

dérons l'extension $M = \mathbf{Q}(\zeta, \sqrt[5]{x})$. — C'est une extension galoisienne de degré 100 sur $\mathbf{Q}$; l'extension $M/\mathbf{Q}(\zeta)$ est de degré 5 et l'ensemble des 4 automorphismes non triviaux de $M/\mathbf{Q}(\zeta)$ est une classe de conjugaison de Gal (M/Q); notons la C. — D'après le théorème de Tchebotarev, il existe une infinité de nombres premiers dont le Frobenius est cette classe de conjugaison. — Soit p un tel nombre premier; il est totalement décomposé dans $\mathbf{Q}(\zeta)$ donc congru à 1 modulo 25, et il n'est pas totalement décomposé dans M donc x n'est pas une puissance 5-ième modulo p. — En conséquence, si $z = \pm p$, le nombre de classes du corps $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2-4z^5)}\right)$ est divisible par 5 dès que $x^2 - 4z^5$ est divisible par 125. — Prenons $x = 2$ et $z = p$ alors $x^2 - 4z^5 = 4 - 4p^5 = y^2\delta$ est divisible par 125. — Pour un δ fixé l'équation $4 - 4p^5 = y^2\delta$ n'a, d'après le théorème de Thue, qu'un nombre fini de solutions; une infinité de p étant permis, on obtient donc l'infinité de δ cherchée et ces δ sont clairement négatifs. — De même, en prenant $x = 11$ et $z = -p$, on obtient l'infinité de δ positifs cherchée. —

Remarque. On peut montrer qu'en fait, dans le cas $l = 5$, les conditions nécessaires à la divisibilité par 5 du nombre de classes de $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2-4z^5)}\right)$ énoncées dans le théorème 4.3.1. sont suffisantes. —

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUT, Max. Relativquadratische Zahlkörper, deren Klassenzahl durch eine vorgegebene ungerade Primzahl teilbar ist. *Comment. Math. Helv. 2.* (1954), pp.270-277.

[2] NEUMANN, Olaf. Relativquadratische Zahlkorper, deren Klassenzahlen durch 3 teilbar sind. *Math. Machrichten 56* (1973), pp. 281--306.

[3] HONDA, Taira. On real quadratic fields whose class numbers are multiples of 3. *J. Reine Angew. Math. 233* (1968), pp. 101-102.

[4] GRAS, Georges. Extensions abéliennes non ramifiées de degré premier d'un corps quadratique. *Bull. Soc. Math. France 100* (1972), pp. 177-193.