

# I. Rappels et notations

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS LES QUATERNIONS

par Bernard BECK

Soit  $H$  un corps de quaternions généralisés, de centre  $K$  (voir [1]).  
Le but de cet article est d'étudier les solutions dans  $H$  de l'équation

$$(1) \quad P(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_0 = 0$$

où  $q_r \in H$ ,  $r = 0, 1, \dots, n$  et  $q_n \neq 0$ .

Dans le cas où le corps  $K$  est le corps des nombres réels et  $H$  le corps des quaternions classiques, I. Niven [2] a démontré les résultats suivants:

- (i) L'équation (1) admet toujours une solution dans  $H$ .
- (ii) L'équation (1) admet une infinité de solutions dans  $H$  si et seulement si  $P(x) = Q(x)(x^2 - 2tx + r)$  où  $t, r \in K$ ,  $t^2 < r$ .
- (iii) Si le nombre de solutions de (1) est fini, celui-ci est au plus  $(2n - 1)^2$ .

On étudie ici l'équation (1) dans le cas le plus général, en reliant les solutions de (1) aux racines d'un polynôme  $n(P)$  à une indéterminée à coefficients dans  $K$ : c'est le théorème de la partie II.

Dans la partie III, on étudie les conséquences de ce théorème et on montre notamment les résultats suivants:

— Si le nombre de solutions de (1) est fini, celui-ci est inférieur ou égal à  $n$ .

— Il existe un unique polynôme  $P$  unitaire de degré  $n$  à coefficients dans  $H$  admettant  $n$  racines 2 à 2 non conjuguées.

## I. RAPPELS ET NOTATIONS

Soit  $H$  un corps de quaternions généralisés. On sait que  $H$  est un espace vectoriel de dimension 4 sur son centre  $K$  et qu'il existe sur  $H$  un antiautomorphisme involutif,  $q \mapsto \bar{q}$ , tel que, quels que soient les éléments  $\lambda$  de  $K$  et  $q, q'$  de  $H$ , on ait

$$\overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q}, \quad \overline{q q'} = \bar{q}' \cdot \bar{q}, \quad \overline{\bar{q}} = q, \quad \overline{\bar{\lambda}} = \lambda$$

(si la caractéristique de  $K$  est différente de 2, alors  $K = \{\mu \in H \mid \bar{\mu} = \mu\}$ , mais cela est faux en caractéristique 2). A tout quaternion  $q$  de  $H$ , on associe deux éléments de  $K$

$$n(q) = q\bar{q} = \bar{q}q, \quad \text{appelé la norme de } q,$$

$$t(q) = q + \bar{q}, \quad \text{appelé la trace de } q,$$

ainsi que le polynôme de  $K[X]$

$$\Delta_q(X) = X^2 - t(q)X + n(q),$$

appelé polynôme caractéristique de  $q$ . On a alors  $\Delta_q(q) = 0$ . Citons sans démonstration les résultats suivants:

*Résultat 1.* Deux éléments  $q$  et  $q'$  de  $H$  sont conjugués (i.e. il existe  $\sigma \in H^*$  tel que  $q' = \sigma q \sigma^{-1}$ ), si et seulement s'ils ont même polynôme caractéristique.

*Résultat 2.* Le polynôme  $\Delta_q$  est irréductible dans  $K[X]$  si et seulement si  $q$  n'est pas dans  $K$ .

*Résultat 3.* Tout élément  $q$  de  $H$  qui n'est pas dans  $K$  admet une infinité de conjugués distincts.

Ces trois résultats montrent que si  $q$  n'est pas dans  $K$ , le polynôme  $\Delta_q(X)$  a une infinité de racines dans  $H$ . Pour les autres propriétés des corps de quaternions, voir [1].

On considère l'anneau  $H[X]$  des polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $H$  où l'indéterminée commute avec les coefficients. Alors  $H[X]$  est un  $K[X]$ -module à droite libre de rang 4; en effet, soit  $\{q_1, \dots, q_4\}$  une base du  $K$ -espace vectoriel  $H$ ; tout polynôme  $P$  de  $H[X]$  s'écrit de manière évidente

$$P(X) = \sum_{i=1}^4 q_i F_i(X) \quad \text{avec} \quad F_i(X) \in K[X].$$

*Résultat 4.* Tout polynôme  $P$  de  $H[X]$  se factorise de manière unique en  $P = P_1 F$  avec  $F$  unitaire dans  $K[X]$ ,  $P_1$  n'étant divisible par aucun polynôme non constant de  $K[X]$ .

*Démonstration.* On écrit  $P(X) = \sum_{i=1}^4 q_i F_i(X)$  comme précédemment et on prend pour  $F$  le P.G.C.D. des  $F_i$ .  $\square$

*Résultat 5.*  $H[X]$  est un  $K[X]$ -module à droite euclidien, i.e. pour tout polynôme  $P$  de  $H[X]$  et pour tout polynôme  $F$  de  $K[X]$ , il existe deux polynômes  $Q$  et  $R$  de  $H[X]$  tels que  $\text{degré } R < \text{degré } F$  et  $P = QF + R$ .

*Démonstration.* On écrit  $P(X) = \sum_{i=1}^4 q_i F_i(X)$  et on effectue la division euclidienne des  $F_i$  par  $F$ .  $\square$

Etant donné un polynôme  $P(X) = \sum_{r=0}^n q_r X^r$  dans  $H[X]$ , on pose  $\bar{P}(X) = \sum_{r=0}^n \bar{q}_r X^r$  et

$$n(p) = P \cdot \bar{P} = \sum_{0 \leq r, s \leq n} q_r \bar{q}_s X^{r+s}.$$

*Résultat 6.* Le polynôme  $n(P)$  est un élément de  $K[X]$ .

*Démonstration.* On a  $n(P) = \sum_{l=0}^{2n} \alpha_l X^l$

et

$$\alpha_l = \sum_{\substack{1 \leq r, s \leq n \\ r+s=l}} q_r \bar{q}_s = a_l + \sum_{\substack{0 \leq r < s \leq n \\ r+s=l}} t(q_r \bar{q}_s),$$

où

$$a = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ est impair} \\ n(q_{l/2}) & \text{si } l \text{ est pair} \end{cases}$$

Donc  $\alpha_l \in K$ .  $\square$

Définissons à présent les racines d'un polynôme de  $H[X]$ . Tout élément  $P(X) = \sum_{r=0}^n q_r X^r$  de  $H[X]$  peut être considéré comme une fonction sur  $H$  en posant  $P(x) = \sum_{r=0}^n q_r x^r$  pour tout  $x$  dans  $H$ , la variable étant toujours à droite des coefficients. La multiplication sur  $H[X]$  ne définit pas une multiplication de fonctions au sens habituel; toutefois, si  $P \in H[X]$  et si  $F \in K[X]$ , alors, pour tout élément  $x$  de  $H$ , on a

$$P \cdot F(x) = P(x) F(x).$$

(On peut traduire cela en disant que  $H[X]$  est canoniquement isomorphe en tant que  $K[X]$ -module à droite à l'ensemble des fonctions polynômes sur  $H$  à variable à droite.)

On dit qu'un quaternion  $x$  est *racine* du polynôme  $P$  si  $P(x) = 0$ .