1. Fonction de valuation d'un polynôme différentiel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

1. Fonction de valuation d'un polynôme différentiel

1.1. Soit K un corps valué ultramétrique complet muni d'une dérivation ∂. On note v la valuation de K et $\alpha(\partial)$ (ou α si aucune confusion n'est à craindre) le nombre

$$\alpha(\partial) = \inf_{a \in K,\, a \neq 0} v(\partial(a)) - v(a)\,.$$

On suppose dorénavant que $\alpha(\partial) > -\infty$; ceci signifie que la dérivation est continue. La dérivation est triviale si et seulement si $\alpha = +\infty$.

On note D_K (ou D si aucune confusion n'est à craindre) l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans K, i.e. l'ensemble des sommes finies $P = \Sigma\, a_i\, \partial^i$ $(a_i \in K)$ muni de l'addition évidente et de la multiplication définie par $\partial^i \partial^j = \partial^{i+j}$, $\partial a = a\partial + \partial(a)$.

1.2. Pour tout $t \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $P = \Sigma\, a_i\, \partial^i \in D_K$ on pose

$$v(P, t) = \inf_i v(a_i) + it\,.$$

On note $N(P, t)$ (resp. $n(P, t)$) le plus grand (resp. le plus petit) entier i tel que $v(a_i) + it = v(P, t)$.

Si P est le polynôme nul on pose, pour tout t, $v(P, t) = +\infty$ et $N(P, t) = n(P, t) = -\infty$.

La fonction $t \mapsto v(P, t)$ est appelée *la fonction de valuation* de P. C'est une fonction continue, concave, affine par morceaux. Son graphe est appelé *le polygone de valuation* de P. Il est clair que $N(P, t)$ (resp. $n(P, t)$) est la dérivée à gauche (resp. à droite) de $v(P, t)$. On a pour tous s et t de $\overline{\mathbf{R}}$, $t < s$

$$N(t) \geqslant n(t) \geqslant N(s) \geqslant n(s)\,.$$

On dit que $t \in \mathbf{R}$ est une valeur exceptionnelle (pour P) si $N(P, t) \neq n(P, t)$. les valeurs exceptionnelles pour P sont en nombre fini.

Pour des raisons qui apparaîtront au § 1.8, on considère que la fonction $v(P, t)$ et la fonction $N(P, t)$ ne sont définies que pour $t \leqslant \alpha(\partial)$ et que la fonction $n(P, t)$ n'est définie que pour $t < \alpha(\partial)$.

1.3. *Propriétés de la fonction de valuation dans le cas commutatif.*

Nous allons rappeler les principales propriétés de la fonction de valuation dans le cas commutatif. Nous utiliserons certaines de ces propriétés par la suite. Nous donnons une idée des démonstrations de ces propriétés. On trouvera les démonstrations détaillées par exemple dans [Am].

1.3.1. Soit $P \in K[X]$, soit $x \neq 0$ de K. On a $v(P(x)) \geqslant v(P, v(x))$ et on a l'égalité si $v(x)$ n'est pas exceptionnel pour P. (C'est évident).

1.3.2. On déduit facilement de 1.3.1 que si la valuation de K est dense on a pour tout $t \in \mathbf{R}$, $v(P, t) = \inf_{v(x) \geqq t} v(P(x))$, ce qui relie la fonction de valuation à la norme de la convergence uniforme.

Pour établir les propriétés de la fonction de valuation on peut toujours supposer, quite à considérer un surcorps de K, que la valuation de K est dense, ce que nous ferons désormais.

1.3.3. Pour tous $P, Q \in K[X]$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$v(PQ, t) = v(P, t) + v(Q, t).$$

D'après 1.3.1 c'est évident lorsque t n'est exceptionnel ni pour P ni pour Q ni pour PQ et que t appartient au groupe des valeurs de K. Par continuité la propriété s'étend à $\mathbf{R}$.

1.3.4. Par dérivation on déduit de 1.3.3 que

$$N(PQ, t) = N(P, t) + N(Q, t) \quad \text{et} \quad n(PQ, t) = n(P, t) + n(Q, t).$$

1.3.5. En décomposant P en facteurs du premier degré dans la clôture algébrique K^{alg} de K, on déduit facilement de 1.3.4 que

$N(P, t)$ est le nombre de zéros de P dans K^{alg} de valuation $\geqslant t$

$n(P, t)$ est le nombre de zéros de P dans K^{alg} de valuation $> t$

$N(P, t) - n(P, t)$ est le nombre de zéros de P dans K^{alg} de valuation t.

Les valeurs exceptionnelles pour P sont donc les valuations des zéros de P dans K^{alg}.

1.3.7. Soit $P \in K[X]$ et soit $\eta \in K$. Alors pour $t \leqslant v(\eta)$ on a $v(P(X+\eta), t) = v(P(X), t)$. Cela se montre en utilisant 1.3.2 et en remarquant que, pour $t \leqslant v(\eta)$, les disques $\{X \in K, v(X+\eta) \geqslant t\}$ et $\{X \in K, v(X) \geqslant t\}$ coïncident.

1.4. Bien que nous ne l'utiliserons pas par la suite, nous allons introduire le polygone de Newton d'un opérateur différentiel afin de faire le lien avec les travaux d'autres auteurs.

Le polygone de Newton de $P = \Sigma a_i \partial^i \in D_K$ est la frontière de l'enveloppe supérieure convexe des points $(i, v(a_i)) \in \overline{\mathbf{R}}^2$. Notons $Nw(P, t)$ la fonction dont le graphe est le polygone de Newton de P. Les fonctions $-v(P, t)$ et $Nw(P, t)$ sont mises en dualité par une transformation de Legendre (cf. [La] § 1.10 pour plus de détails). En particulier les valeurs exceptionnelles pour P sont les pentes des côtés de son polygone de Newton changées de signe.

Comme nous ne considérons la fonction de valuation que dans l'intervalle $(-\infty, \alpha]$; nous ne conservons que les côtés du polygone de Newton de P de pente $\geqslant -\alpha$.

1.5. *Addition.*

PROPOSITION. *Soient P et $Q \in D_K$. On a pour tout t*

$$v(P+Q, t) \geqslant \inf\big(v(P, t), v(Q, t)\big).$$

On a égalité si $v(P, t) \neq v(Q, t)$ ou si $N(P, t) \neq N(Q, t)$ ou si $n(P, t) \neq n(Q, t)$.

C'est évident.

1.6. *Multiplication.*

Les propriétés que nous allons établir dans ce paragraphe et les suivants montrent que, pour $t \leqslant \alpha$ et moyennant un terme correctif, du point de vue de la fonction de valuation tout se passe comme si la dérivation commutait avec la multiplication par les éléments de K.

PROPOSITION. 1) *Soient $P(X), Q(X) \in K[X]$ et soient $P(\partial), Q(\partial)$ les opérateurs différentiels associés. Soit $R(X) = P(X)\,Q(X) \in K[X]$ et soit $R(\partial)$ l'opérateur différentiel associé. On a pour tout $t \leqslant \alpha$*

$$v\big(R(\partial) - P(\partial)\,Q(\partial), t\big) \geqslant v(P, t) + v(Q, t) + \alpha - t.$$

2) *Soient $P, Q \in D_K$. Pour $t \leqslant \alpha$ on a*

$$v(PQ, t) = v(P, t) + v(Q, t)$$
$$N(PQ, t) = N(P, t) + N(Q, t).$$

Pour $t < \alpha$ on a

$$n(PQ, t) = n(P, t) + n(Qt).$$

Démonstration :

1) Vérifions le pour $P(X) = X^i$ *et* $Q(X) = a$. On a

$$a\partial^i - \partial^i a = - \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \partial^i(a)\, \partial^{i-j}$$

d'où pour $t \leqslant \alpha$

$$v(a\partial^i - \partial^i a, t) \geqslant \inf_{j \geqq 1} \big(v(a) + j\alpha + (i-j)t\big) = v(a) + it + \alpha - t\,.$$

Soient maintenant $P(X) = \sum_i a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_j b_j X^j$. On a

$$R(\partial) - P(\partial)Q(\partial) = \sum_{i,j} a_i (b_j \partial^i - \partial^i b_j)\, \partial^j\,.$$

Par conséquent, utilisant 1.5, on obtient

$$v\big(R(\partial) - P(\partial)Q(\partial), t\big) \geqslant \inf_{i,j} \big(v(a_i) + v(b_j) + it + jt + \alpha - t\big)$$
$$= \inf_i \big(v(a_i) + it\big) + \inf_j \big(v(b_j) + jt\big) + \alpha - t$$

ce qui termine la démonstration.

2) D'après 1.3.3 on a $v(R, t) = v(P, t) + v(Q, t)$. Pour $t < \alpha$ la relation annoncée s'en déduit grâce à 1) et à la proposition 1.5. Le cas $t = \alpha$ s'obtient par continuité.

1.7. *Adjonction.*

Soit $P = \sum a_i \partial^i \in D_K$. Son adjoint est l'opérateur $P^* = \sum (-1)^i \partial^i a_i$ cf. [In] (5.3). On voit comme dans la proposition précédente que l'on a pour $t \leqslant \alpha$

$$v(P^*, t) = v(P, t)\,.$$

1.8. La proposition 1.6. 2) n'est plus vraie pour $t > \alpha$. En effet soit $a \in K$, avec $\partial(a) \neq 0$. Soit $P = \partial$, $Q = a$; on a $PQ = a\partial + \partial(a)$ et donc pour $t > v\big(\partial(a)\big) - v(a)$ on aura

$$v(PQ, t) = \inf\big(v(\partial(a)), v(a) + t\big) = v\big(\partial(a)\big) \neq v(P, t) + v(Q, t)$$
$$= v(a) + t\,.$$

C'est pour cette raison qu'on considère que la fonction de valuation $v(P, t)$ n'est définie que pour $t \leqslant \alpha$. On notera que, quelle que soit la représentation de l'opérateur $P \in K_D$, $P = \sum_i a_i \partial^i b_i$, on a toujours pour $t \leqslant \alpha$, $v(P, t) = \inf\big(v(a_i) + v(b_i) + it\big)$.

1.9. *Homothétie.*

Proposition. 1) *Soit* $P(X) \in K[X]$ *et soit* $P(\partial)$ *l'opérateur différentiel associé. Soit* $\xi \in K$. *Notons* $R(X) = P(\xi X) \in K[X]$ *et soit* $R(\partial)$ *l'opérateur différentiel associé. Pour* $t \leqslant \alpha$ *on a*

$$v\big(R(\partial) - P(\xi\partial), t\big) \geqslant v\big(P, t + v(\xi)\big) + \alpha - t .$$

2) *Pour* $t \leqslant \alpha$ *on a*

$$v\big(P(\xi\partial), t\big) = v\big(P(\partial), t + v(\xi)\big) .$$

Pour éviter toute ambiguïté indiquons que si $P(\partial) = \Sigma\, a_i\, \partial^i$, alors $R(\partial) = \Sigma\, a_i\, \xi^i\, \partial^i$ et $P(\xi\partial) = \Sigma\, a_i\, (\xi\partial)^i$.

Démonstration :

1) Vérifions l'assertion pour $P(\partial) = \partial^i$. On fait une récurrence sur i. Pour $i = 1$ c'est vérifié puisque $R(\partial) - P(\xi\partial) = 0$.

Posons $\xi^i\, \partial^i - (\xi\partial)^i = Q_i(\partial)$.

Alors $Q_{i+1}(\partial) = \xi\, \partial\, Q_i(\partial) - i\, \partial(\xi)\, \xi^i\, \partial^i$.

Notre hypothèse de récurrence est

$$v\big(Q_i(\partial), t\big) \geqslant iv(\xi) + it + \alpha - t .$$

En appliquant 1.5 et 1.6 on obtient à l'ordre $i + 1$

$$\begin{aligned} v\big(Q_{i+1}(\partial), t\big) &\geqslant \inf\big(v\big(\xi\partial Q_i(\partial), t\big), (i+1)\, v(\xi) + \alpha + it\big) \\ &= (i+1)\, v(\xi) + (i+1)\, t + \alpha - t . \end{aligned}$$

Soit maintenant $P(X) = \sum_i a_i\, X^i$. On a $R(\partial) - P(\xi\partial) = \sum_i a_i\, Q_i(\partial)$. En tenant compte de 1.5 on obtient donc

$$\begin{aligned} v\big(R(\partial) - P(\xi\partial), t\big) &\geqslant \inf_i \big(v(a_i) + i\big(t + v(\xi)\big) + \alpha - t\big) \\ &= v\big(P(\partial), t + v(\xi)\big) + \alpha - t . \end{aligned}$$

2) Dans le cas commutatif on a $v(R, t) = v\big(P, t + v(\xi)\big)$, cela se voit facilement en appliquant 1.3.2. Alors en appliquant 1) et la proposition 1.5 on obtient la relation annoncée pour $t < \alpha$. Le cas $t = \alpha$ s'en déduit par continuité.

1.10. *Remarque.*

Dans le cas où la dérivation n'est pas triviale, la proposition précédente suggère d'associer au polynôme différentiel $P(\partial)$ la fonction

$$w\big(P(\partial), t\big) = v\big(P(\partial), t + \alpha(\partial)\big)$$

définie pour $t \leqslant 0$. Cette fonction est liée de façon plus intrinsèque à l'opérateur différentiel et ne dépend pas de la dérivation choisie pour le représenter. En effet, soit $\xi \in K$, $\xi \neq 0$, et considérons la dérivation $\delta = \xi \partial$. On a $\alpha(\delta) = \alpha(\partial) + v(\xi)$. Maintenant l'opérateur différentiel $P(\partial)$ est représenté à l'aide de la dérivation δ par $Q(\delta) = P(\xi^{-1}\partial)$. On aura donc grâce à la proposition 1.8, pour $t \leqslant 0$

$$\begin{aligned} w\big(Q(\delta), t\big) &= v\big(Q(\delta), t + \alpha(\delta)\big) = v\,\big(P(\partial), t - v(\xi) + \alpha(\partial) + v(\xi)\big) \\ &= w\big(P(\partial), t\big). \end{aligned}$$

Une telle normalisation n'est évidemment pas possible dans le cas commutatif (dérivation triviale).

Pour garder notre exposé aussi proche du cas commutatif que possible nous utiliserons la fonction $v(P, t)$ et non la fonction $w(P, t)$, préférant, quand cela sera nécessaire, choisir une dérivation ∂ telle que $\alpha(\partial) = 0$.

1.11. *La fonction de Gerard-Levelt.*

Soit k un corps et soit $K = k\big((x)\big)$ muni de sa valuation x-adique. Considérons sur K la dérivation $\partial = x \dfrac{d}{dx}$. On a $\alpha(\partial) = 0$. Si $P = \Sigma\, a_i\, \partial^i \in D_K$, P d'ordre m, on voit facilement, compte tenu de la proposition 1.8, que la fonction $\rho_k(P)$ de Gerard-Levelt introduite par Ramis [Ra] à la suite de Gerard-Levelt [Ge] est liée à la fonction de valuation par la relation

$$\rho_k(P) = v(a_m) - mk - v(P, -k) \qquad k \geqslant 0\,.$$

Le polygone de Newton $\mathscr{P}^+(P)$ considéré par Ramis [Ra] puis Malgrange [Ma] est le polygone de Newton de P prolongé par un côté de pente 0 pour remplacer les éventuels côtés de pente <0 que l'on doit supprimer (cf. § 1.4).

1.12. *Translation.*

Proposition. 1) *Soit* $P(X) \in K[X]$ *et soit* $P(\partial)$ *l'opérateur différentiel associé. Soit* $\eta \in K$. *Posons* $R(X) = P(X + \eta) \in K[X]$. *On a pour* $t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)$.

$$v\big(R(\partial)-P(\partial+\eta),t\big) \geqslant v\big(P(\partial),t\big) + \alpha - t\,.$$

2) *Pour* $t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)$ *on a*

$$v\big(P(\partial+\eta),t\big) = v\big(P(\partial),t\big)\,.$$

Si $v(\eta) < \alpha$ *on a*

$$n\big(P(\partial+\eta),v(\eta)\big) = n\big(R,v(\eta)\big)\,.$$

Démonstration :

1) Vérifions le pour $P(\partial) = \partial^i$. On fait une récurrence sur i. Pour $i = 0$ c'est vérifié puisque $R(\partial) - P(\partial+\eta) = 0$.

Posons $\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \eta^j \partial^{i-j} - (\partial+\eta)^i = Q_i(\partial)$.

Alors $Q_{i+1}(\partial) = (\partial+\eta)\,Q_i(\partial) - \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} j\,\partial(\eta)\,\eta^{j-1}\,\partial^{i-j}$.

Notre hypothèse de récurrence est

$$v\big(Q_i(\partial),t\big) \geqslant it + \alpha - t \qquad \text{si} \qquad t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)\,.$$

En appliquant 1.5 et 1.6 on obtient à l'ordre $i+1$

$$\begin{aligned} v\big(Q_{i+1}(\partial),t\big) &\geqslant \inf\Big(v\big(Q_i(\partial),t\big) + \inf\big[v(\eta),t\big],\ \inf_{1\leqq j\leqq i}\big[\alpha + jv(\eta) \\ &\qquad + (i-j)\,t\big]\Big) \\ &\geqslant it + \alpha = i(t+1) + \alpha - t \qquad \text{si} \qquad t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)\,. \end{aligned}$$

Soit maintenant $P(X) = \sum_i a_i X^i$. On a $R(\partial) - P(\partial+\eta) = \sum_i a_i\,Q_i(\partial)$. Par conséquent, en utilisant 1.5, on obtient pour $t \leqslant \inf\big(\alpha, v(\eta)\big)$

$$v\big(R(\partial)-P(\partial+\eta),t\big) \geqslant \inf_i\big(v(a_i) + it + \alpha - t\big) = v(P,t) + \alpha - t\,.$$

2) Pour $t \leqslant v(\eta)$ on a, d'après 1.3.7, $v(R,t) = v(P,t)$; d'où, si de plus $t < \alpha$, $v\big(P(\partial+\eta),t\big) = v(P,t)$. (Le cas éventuel $t = \alpha$ s'en déduit encore par continuité).

Si $v(\eta) < \alpha$ on vient de voir que

$$v\big(R(\partial)-P(\partial+\eta),t\big) > v\big(R(\partial),t\big) \qquad \text{pour} \qquad t = v(\eta)\,;$$

donc, par continuité, ceci reste vrai dans un voisinage de $v(\eta)$ et alors on a dans ce voisinage $v\big(R(\partial),t\big) = v\big(P(\partial+\eta),t\big)$, ce qui entraîne l'égalité des dérivées à droites en $t = v(\eta)$, c'est-à-dire la formule annoncée.

1.13. *Continuité de la division.*

Rappelons que D_K est un anneau euclidien aussi bien pour la division à droite que la division à gauche.

Définitions. Soit $P \in D_K$, $P \neq 0$. On dit que P est *t-dominant* si $N(P, t) = \deg P$. On dit que P est *t-extrémal* si $N(P, t) = \deg P$ et $n(P, t) = 0$. On peut encore dire que P est t-dominant s'il n'a pas de valeurs exceptionnelles $< t$, et qu'il est t-extrémal si sa seule valeur exceptionnelle est t. Dans le cas commutatif P est t-dominant (resp. t-extrémal) si tous ses zéros dans K^{alg} sont de valuation $\geqslant t$ (resp. $= t$) ainsi qu'il résulte de 1.3.6.

PROPOSITION. *Soit $P \in D_K$, t-dominant avec $t \leqslant \alpha$. Soient A, Q, $R \in D_K$ tels que*

$$A = QP + R \qquad \deg R < \deg P .$$

On a alors

$$v(Q, t) \geqslant v(A, t) - v(P, t), \quad v(R, t) \geqslant v(A, t) .$$

Même énoncé pour la division à gauche : $A = PQ' + R'$.

Démonstration : On a

$$N(QP, t) = N(Q, t) + N(P, t) \geqslant N(P, t) = \deg P > \deg R \geqslant N(R, t) .$$

On a donc d'après 1.5

$$v(QP + R, t) = \inf\big(v(QP, t), v(R, t)\big) .$$

D'où le résultat en appliquant 1.6.

1.14. *Opérateurs fuchsiens.*

Considérons le cas $K = k\big((x)\big)$ avec $\partial = \dfrac{d}{dx}$ (cf. § 1.11). On a $\alpha(\partial) = -1$. Il est facile de voir que dire que P est (-1)-dominant équivaut à dire que P vérifie la condition de Fuchs, (poir singulier-régulier).

Par analogie on dira dans le cas général que $P \in D_K$ est *Fuchsien* si P est α-dominant. Comme à la remarque 1.10 on voit que cette propriété ne dépend que de l'opérateur différentiel et pas du choix de la dérivation.