3. Puissances extérieures et puissances symétriques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

2.5. *Formes alternées et formes quadratiques*

Les deux remarques de 2.3 nous conduisent aux définitions suivantes: $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)$ sont deux anneaux commutatifs $Z/(2)$-gradués dont les composantes homogènes de degré 0 sont $K_0^{SB}(R)$ pour chacun d'eux et les composantes de degré 1 respectivement $L_{\mathrm{Alt}}(R)_1 = K_0^{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)_1 = K_0^Q(R)$. Le produit dans $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ est défini à l'aide de l'application de $K_0^{\mathrm{Alt}}(R) \times K_0^{\mathrm{Alt}}(R)$ dans $K_0^{SB}(R)$ vue en 2.3. Celui de $L_Q(R)$ est défini par la formule:

$$(b, q)(b', q') = (bb' + \varphi_q \cdot \varphi_{q'}, b \cdot q' + b' \cdot q) .$$

L'intérêt de ces deux anneaux est qu'ils sont le cadre naturel des opérations λ et σ sur les formes bilinéaires symétriques, alternées et quadratiques que nous verrons en 3.

Si 2 est inversible dans R, la bilinéarisation est un isomorphisme de K_0^Q sur K_0^{SB} et $L_Q = K_0^{SB}(R)[x]$ avec $x^2 = 1$. Les anneaux L_{Alt} et L_Q jouissent des propriétés fonctorielles usuelles vis-à-vis de l'extension des scalaires.

3. Puissances extérieures et puissances symétriques

Les puissances extérieures sont un outil important de l'algèbre linéaire. Nous souhaitons montrer ici que dans le cadre des modules bilinéaires ou quadratiques des constructions semblables peuvent être faites. Cela permettra de munir les anneaux rencontrés dans la partie précédente d'opérations λ et σ.

3.1. *Puissances extérieures de modules bilinéaires*

Soit (M, φ, N) un R-module bilinéaire; si $N = A$, la définition des puissances extérieures de φ est bien connue ([3], [8]). Dans le cas général, définissons l'application de $M \times M \times \ldots \times M$, $2p$ fois, dans l'algèbre symétrique $S(N)$ du R-module N qui à $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p)$ associe le déterminant de la matrice des $\varphi(x_i, y_j)$, $\varphi(x_i, y_j) \in N = S^1(N)$, sous R-module de $S(N)$. C'est une application multilinéaire par rapport aux x_i et y_j et alternée vis-à-vis des x_i d'un côté et des y_j de l'autre. On obtient ainsi un module bilinéaire $(\Lambda^p M, \Lambda^p \varphi, S^p N)$, la puissance extérieure $p^{\text{ième}}$ de (M, φ, N). Si φ est ε-symétrique, $\Lambda^p \varphi$ est ε^p-symétrique. Si φ est non seulement antisymétrique mais alternée, $\Lambda^{2p}\varphi$ est symétrique mais non alternée en général (car 0 si 2 était inversible...). Cependant $\Lambda^{2q+1}\varphi$ est alternée: en effet c'est un module antisymétrique et si $z = x_1 \Lambda \ldots \Lambda x_{2q+1}$, $\Lambda^{2q+1}\varphi(z, z)$ est le déterminant de la matrice alternée d'ordre impair formé des $\varphi(x_i, x_j)$ et donc vaut 0. Le même raisonnement que celui qui a été fait en 2.1 pour le produit tensoriel montre que $\Lambda^{2q+1}\varphi$ est alternée.

3.2. *Puissances extérieures de modules quadratiques*

Si 2 est inversible dans R; modules quadratiques et modules bilinéaires symétriques sont identiques. Ainsi si (M, q, N) est un module quadratique sa $p^{\text{ième}}$ puissance extérieure est $(\Lambda^p M, \Lambda^p q, S^p N)$ où $\Lambda^p q(x) = \dfrac{1}{2} \Lambda^p \varphi_q(x, x)$ et $\varphi_{\Lambda^p q} = \Lambda^p \varphi_q$. Par contre si $2 = 0$ dans R, φ_q est alternée, de sorte qu'il est impossible de définir $\Lambda^{2h} q$ convenablement car $\Lambda^{2h}\varphi_q$ est symétrique mais non alternée en général et donc on ne pourrait pas avoir $\varphi_{\Lambda^{2h}_q} = \Lambda^{2h}\varphi_q$. Cependant, comme pour les formes alternées en 3.1, nous allons voir qu'il est possible de définir raisonnablement $\Lambda^{2h+1} q$.

LEMME 3.2.1. *Soient* $A_n = \mathbf{Z}[X_{ij}]$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ *et* Δ_n *le déterminant*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{12} & 2X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ X_{13} & X_{23} & \cdots & X_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & 2X_{nn} \end{vmatrix}$$

Si n *est impair, il existe un élément* P_n *de* A_n *tel que* $\Delta_n = 2P_n$.

En réduisant modulo 2, on voit que Δ_n est le déterminant d'une matrice alternée d'ordre impair, donc 0 modulo 2. Le polynôme P_n est évidemment unique. Soient maintenant (M, q, N) un module quadratique et n un entier impair. On a la

PROPOSITION 3.2.2. *Il existe un module quadratique* $(\Lambda^n M, \bar{q}, S^n N)$ *et un seul tel que*

(i) $\varphi_{\bar{q}} = \Lambda^n \varphi_q$

(ii) $\bar{q}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = P_n(a_{ij})$ où $a_{ii} = q(x_i)$ et $a_{ij} = \varphi_q(x_i, x_j)$ si $i < j$.

Dorénavant $\bar{q}$ sera notée $\Lambda^n q$; l'unicité de $\Lambda^n q$ est claire car les conditions (i) et (ii) permettent de calculer $\Lambda^n q$ sur tout élément de $\Lambda^n M$.

Pour montrer l'existence de $\Lambda^n q$, considérons la suite exacte $0 \to L \to R^{(M)} \to M \to 0$ où l'on note $(e_x)_{x \in M}$ la base canonique de $R^{(M)}$ supposée totalement ordonnée. Définissons sur $\Lambda^n R^{(M)}$ une application quadratique q' à valeurs dans $S^n(M)$ par

$$q'(e_{x_1} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) = P_n\big(q(x_i), \varphi_q(x_i, x_j)\big), \quad i < j\,,$$

$$\varphi'(e_{x_1} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}, e_{y_1} \wedge \ldots \wedge e_{y_n}) = \text{dét}\big(\varphi_q(x_i, y_j)\big), \, 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

et

$$x_1 \leqslant \ldots < x_n, y_1 < \ldots < y_n\,.$$

Dans la suite exacte $0 \to L' \to \Lambda^n R^{(M)} \to \Lambda^n M \to 0$, le sous-module L' est engendré par les éléments de la forme

$$(e_{ax} - a e_x) \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}$$

et

$$(e_{x+y} - e_x - e_y) \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}$$

où $x, y, x_2, \ldots, x_n$ sont dans M et a dans R. Il est facile de vérifier que L' est contenu dans le noyau de q' (i.e. $\{ t \mid t \in \Lambda^n R^{(M)}, q'(t) = 0$ et $\varphi_q'(t, z) = 0, \forall z \in R^{(M)} \}$). Par exemple

$$\begin{aligned} q'\big((e_{ax} - a e_x) & \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}\big) \\ &= q'(e_{ax} \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) + a^2 q(e_x \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) \\ &\quad - a\varphi'(e_{ax} \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}, e_x \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n}) = 0 \end{aligned}$$

et, de même

$$\varphi'\big((e_{ax} - a e_x) \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{y_n}, e_{y_1} \wedge \ldots \wedge e_{y_n}\big) = 0\,.$$

Pour les éléments de la seconde forme, la nullité de q' exprime le caractère quadratique de l'application $x \mapsto q'(e_x \wedge e_{x_2} \wedge \ldots \wedge e_{x_n})$ et on montre aussi facilement l'orthogonalité de L' avec tout élément de $\Lambda^n R^{(M)}$. Comme le noyau de q' contient L', l'application quadratique q' passe au quotient en une application quadratique $\bar{q} = \Lambda^n q$ de $\Lambda^n M$ dans $S^n N$ vérifiant les conditions (i) et (ii) par construction.

Remarque 3.2.3. Supposons que $N \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)$, alors $S^p(N) = N^{\otimes P}$ est dans $\underline{\mathrm{Pic}}(R)$ de sorte qu'on peut se préoccuper de la non dégénérescence des formes en question. Il est clair que, comme cela ne dépend que des formes bilinéaires, les puissances extérieures de modules bilinéaires et de modules quadratiques non dégénérés sont non dégénérés. Notons ici que, bien que cela ne soit pas dans la même catégorie, on appellera encore puissance extérieure de φ, alternée, ou de q, quadratique, le module bilinéaire symétrique $\Lambda^{2h}\varphi$ ou $\Lambda^{2h}\varphi_q$ selon les cas. Tout cela commute naturellement à l'extension des scalaires.

3.3. *Puissances extérieures d'une somme orthogonale*

Soient (M, φ, N) et (M', φ', N) deux modules bilinéaires ε-symétriques ou alternés. La formule bien connue pour les puissances extérieures de la somme directe de deux modules est encore valable pour la somme orthogonale des deux modules bilinéaires (M, φ) et (M', φ').

En effet, en tant que module $\Lambda^p(M \oplus M')$ est la somme directe des produits tensoriels $\Lambda^r M \otimes \Lambda^{p-r} M'$, $0 \leqslant r \leqslant p$. Il suffit donc de vérifier que cette décomposition est une décomposition orthogonale vis-à-vis de la forme bilinéaire $\Lambda^p(\varphi \perp \varphi')$ et que la restriction de cette dernière sur chaque facteur est $\Lambda^r\varphi \otimes \Lambda^{p-r}\varphi'$.

On a des formules analogues pour les modules quadratiques en distinguant bien suivant les parités. Ainsi $\Lambda^{2p+1}(q \perp q') \simeq \mathop{\perp}\limits_{r=0}^{r=2p+1} \Lambda^r q \otimes \Lambda^{(2p+1)-r} q'$ où l'on notera que $\Lambda^0 q$ est l'élément unité pour la multiplication de K_0^{SB} et que si r est pair, $(2p+1)-r$ est impair, si bien que l'une des deux formes $\Lambda^r q$ et $\Lambda^{(2p+1)-r} q'$ est une forme quadratique et que l'autre est un module bilinéaire symétrique, le résultat final étant toujours un module quadratique. Par contre $\Lambda^{2p}(q \perp q') \simeq \mathop{\perp}\limits_{r=0}^{2p} \Lambda^r q \otimes \Lambda^{2p-r} q'$ de sorte que r et $2p-r$ sont toujours de même parité. Si r est pair, on a deux modules bilinéaires symétriques dont le produit est un module bilinéaire; si r est impair, on a deux modules quadratiques dont le produit doit être considéré comme un module bilinéaire (cf. 2.2 et 2.5).

Cela montre en particulier que si φ (resp. q) est un module bilinéaire (resp. quadratique) non dégénéré, la classe de $\Lambda^p\varphi$ (resp. $\Lambda^p q$) dans le groupe universel correspondant ne dépend que de la classe de φ (resp. de q). En effet, on montre par récurrence sur p que si $\varphi \perp \varphi_1 \simeq \varphi' \perp \varphi_1$, alors $\Lambda^p\varphi$ et $\Lambda^p\varphi'$ sont stablement isomorphes et de même pour les formes quadratiques. On remarque alors que si φ est un module bilinéaire et t une indéterminée, on peut poser

$$\Lambda_t(\varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} [\Lambda^p(\varphi)]\, t^p$$

où $[\Lambda^p(\varphi)]$ est dans un groupe universel convenable. Les considérations du début du paragraphe montrent que $\Lambda_t(\varphi \perp \varphi') = \Lambda_t(\varphi) \,.\, \Lambda_t(\varphi')$. Comme $\Lambda_t(0)$ est l'élément neutre de l'anneau $K_0^{SB}(R)$, on déduit formellement $\Lambda_t(-\varphi)$ comme $[\Lambda_t(\varphi)]^{-1}$ la série formelle, inverse du polynôme $1 + \sum_{p=0}^{\infty} [\Lambda^p(\varphi)]\, t^p$. Maintenant si $z = \varphi_1 - \varphi_2$ est la différence de deux modules bilinéaires, on définit $\Lambda_t(z) = \Lambda_t(\varphi_1)\, [\Lambda_t(\varphi_2)]^{-1}$ et $\Lambda^p(z)$ est le coefficient de degré p de la série formelle $\Lambda_t(z)$. On a ainsi défini des opérations Λ^p de $K_0^{\cdot}(N)$ dans $K_0^{*}(N^{\otimes p})$ où $* = .$ si p est impair et $* = SB$ si p est pair de sorte que Λ_t défini par $\Lambda_t(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \Lambda^p(z)\, t^p$ est additive en z.

Nous n'avons parlé ici que de modules bilinéaires mais il est tout à fait clair que ce formalisme s'adapte tout à fait au cas quadratique.

3.4. *Pré λ-anneaux et λ-anneaux*

Nous rappelons ici brièvement les notions de λ et de pré λ-anneaux ([4], [10]).

Définition. Un pré-λ-anneau est un anneau commutatif et unitaire K, muni d'un homomorphisme de groupes abéliens

$$\lambda_t : K \to U(K[[t]])$$

tels que $\lambda_t(x) = 1 + x\, t + \ldots$

Cela équivaut à la donnée des applications $\lambda^i : K \to K$ vérifiant les conditions

(i) $\lambda^o(x) = 1$

(ii) $\lambda^1(x) = x$

(iii) $\lambda^n(x+y) = \sum_{p+q=n} \lambda^p(x) \,.\, \lambda^q(y)\,, \quad \forall\, x, y \in K, \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$

Un homomorphisme de pré-λ-anneau de (K, λ) dans (K', λ') est un homomorphisme d'anneau f qui commute aux opérations λ.

Dans [10], on définit sur le groupe abélien $1 + K[[t]]^+$ des séries formelles une multiplication $*$ distributive, associative et commutative dont $1 + t$ est élément unité. Sur ce nouvel anneau commutatif et unitaire, les λ^i permettent de définir des opérations λ sur $K' = 1 + K[[t]]^+$. On dit que K est un λ-anneau si λ_t est un homomorphisme d'anneaux de K dans K' compatible avec les opérations λ^i sur K et K'.

Par exemple on vérifie aisément que Z muni des λ-opérations $\lambda^i(n) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i\,!}$ est un λ-anneau.

En fait, un pré-λ-anneau est un λ-anneau si et seulement si les opérations λ^i vérifient deux séries de relations:

$$\begin{cases} \lambda^i(xy) = P_i(\lambda^1(x), \lambda^2(x), \dots, \lambda^i(x); \lambda^1(y), \dots, \lambda^i(y)) \\ \lambda^j(\lambda^i(x)) = Q_{i,j}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{ij}(x)) \end{cases}$$

où les polynômes P_i et $Q_{i,j}$ sont des polynômes *universels* (i.e. indépendants de K), $P_i \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_i; Y_1, \dots, Y_i]$, $Q_{i,j} \in \mathbf{Z}[X_1, X_2, \dots, X_{ij}]$ et x et y décrivent K. Les polynômes P_i et $Q_{i,j}$ vérifient certaines conditions d'homogénéité et de symétrie qu'on trouvera dans [10] (voir aussi [4]).

D'autres exemples de λ-anneau sont l'anneau des classes de fibrés vectoriels sur un espace topologique compact et l'anneau $K_0(R)$ des classes de R-modules projectifs de type fini.

3.5. *Opérateurs λ sur L_{Alt} et L_Q*

Les considérations précédentes permettent de voir immédiatement que $K_0^{SB}(R)$ est muni d'une structure de pré-λ-anneau par l'intermédiaire des applications Λ^i. En fait les anneaux de 2.6, $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)$ sont aussi des pré-λ-anneaux: on posera à cet effet

$$\lambda_t(a_0, a_1) = \lambda_t(a_0, 0)\,\lambda_t(0, a_1)$$

où $\lambda_t(a_0, 0) \in 1 + K_0^{SB}(R)[[t]]^+$ comme vu précédemment et $\lambda_t(0, a_1) = 1 + (0, a_1)\,t + (\Lambda^2 a_1, 0)\,t^2 + \dots + (0, \Lambda^{2k-1}a_1)\,t^{2k-1} + (\Lambda^{2k}a_1, 0)\,t^{2k} + \dots$ En fait, ce sont des pré-λ-anneaux $Z/(2)$-gradués en ce sens que $\lambda^i(L_j) \subset L_{ij}$, le produit ij étant calculé modulo 2.

De la même façon, l'anneau $L = \overline{K_0^{SB}}(R)$ gradué sur Pic (R) est un pré-λ-anneau Pic (R)-gradué en ce sens que $\lambda^i(L_N) \subset L_{iN}$, $iN = N^{\otimes i}$. Tous les foncteurs oublis induisent des homomorphismes d'anneaux à valeurs dans $K_0(R)$ qui sont des pré-λ-homomorphismes.

On notera ici que les opérations λ ne passent pas au quotient par les espaces hyperboliques car les puissances extérieures paires d'une forme hyperbolique ne sont pas hyperboliques, bien que ce soit le cas pour les puissances extérieures impaires.

3.6. *Puissances symétriques*

Soit $P \in \underline{P}(R)$ et $S^k(P)$ la $k^{\text{ième}}$ puissance symétrique du R-module P. On pose $\sigma_t(P) = \sum_{k=0}^{\infty} [S^k(P)]\, t^k \in K_0(R)[[t]]$ et σ_t se prolonge en un homomorphisme de groupes abéliens de $K_0(R)$ dans $U(K_0(R)[[t]])$. On définit ainsi des opérations $\sigma^k : K_0(R) \to K_0(R)$ et $\sigma_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k(x)\, t^k$. On démontre à l'aide du complexe de Koszul ([2]) la formule

$$\lambda_t(x)\, \sigma_{-t}(x) = 1 \tag{1}$$

pour tout x dans $K_0(R)$. Si f est un endomorphisme de P, on peut associer à f, un polynôme et une série formelle à coefficients dans R, en posant $\lambda_t(f) = \sum_{i=0}^{\infty} Tr(\Lambda^i(f))\, t^i$ et $\sigma_t(f) = \sum_{j=0}^{\infty} Tr(S^j(f))\, t^j$. On a alors la formule analogue

$$\lambda_t(f)\, \sigma_{-t}(f) = 1 \tag{2}$$

qui peut se démontrer directement à l'aide du complexe de Koszul comme dans [2], ou bien en se ramenant au cas où P libre puis où $R = \mathbf{Z}[X_{ij}]$ et enfin à celui où R est un corps algébriquement clos, auquel cas f est triangularisable; les traces se calculent alors en fonction des valeurs propres de f, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et la formule à montrer est une identité bien connue. Les formules (1) et (2) peuvent se combiner en considérant la catégorie des couples (P, f), $P \in \underline{P}(R)$, $f \in \mathrm{End}_R(P)$ dont le groupe universel $K_0(R, \mathbf{N})$ possède des opérations λ et σ et vérifie la formule (1).

Nous allons montrer ici comment on peut définir des puissances symétriques de façon directe pour les modules bilinéaires et pour les modules quadratiques. Rappelons que le *permanent* d'une matrice $a_{ij} \in M_n(R)$ est le scalaire $\sum_{\sigma \in \sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, qui coïncide avec le déterminant en caractéristique 2.

Soit alors (M, φ, N) un module bilinéaire; la puissance symétrique $p^{\text{ième}}$ se définit en considérant l'application qui à $(x_1, \dots, x_p;\ y_1, \dots, y_p) \in M^{2p}$ associe le permanent de la matrice $\varphi(x_i, y_j)$, élément de $S^p(N)$. C'est une application linéaire par rapport aux x_i et aux y_j et symétrique séparément par rapport à chaque ensemble de p variables $x_1, \dots, x_p;\ y_1, \dots, y_p$ On obtient ainsi un module bilinéaire $(S^pM, S^p\varphi, S^pN)$; si φ est ε-symétrique, $S^p\varphi$ sera ε^p-symétrique et on voit comme dans 3.1 que si φ est alternée, $S^p\varphi$ est alternée pour p impair (le permanent d'une matrice alternée d'ordre impair est 0). En utilisant la même technique que pour les puissances extérieures (le lemme 3.2.1 a un énoncé analogue en remplaçant Δ_n par le permanent des X_{ij}), on montre qu'un module quadratique (M, q, N) possède des puissances symétriques impaires $(S^{2p+1}M, S^{2p+1}q, S^{2p+1}N)$ avec $\varphi_{S^{2p+1}q} \cong S^{2p+1}\varphi_q$; pour puissances symétriques d'ordre pair, il est naturel de prendre les puissances correspondantes de φ_q.

Comme on a la formule $S^p(\varphi \perp \varphi') \simeq \perp_{r=0}^{p} S^r(\varphi) \otimes S^{p-r}\varphi'$, φ et φ' étant deux modules bilinéaires de même nature, on voit qu'on peut définir sur les anneaux $K_0^{SB}(R)$, $L_{\mathrm{Alt}}(R)$, $L_Q(R)$, $\overline{K_0^{SB}(R)}$ des opérations σ de sorte que $x \overset{\sigma_t}{\mapsto} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k(x)\, t^k$ est un homomorphisme de groupes abéliens σ_t. La formule $1 = \lambda_{-t}(x)\,\sigma_t(x)$ est claire si R est un corps, ou même un anneau semi-local, car il suffit de la montrer pour un module de rang 1 ou 2; elle doit être vraie dans le cas général.

3.7. *Problème*

Bien que cela paraisse naturel, en particulier à cause de l'analogue en K-théorie topologique, je ne sais pas montrer que les anneaux introduits dans la 2e partie sont des λ-anneaux (cf. 3.4). C'est, comme plus haut, vrai si R est semi-local car alors on est ramené à démontrer les formules universelles pour des modules de rang 1 ou 2 (si 2 n'est pas inversible). Il en est naturellement de même pour les modules quadratiques et alternés.

4. λ-ANNEAUX ET ANNEAUX DE WITT-GROETHENDIECK

Dans ce paragraphe, nous rassemblons quelques remarques et résultats concernant les anneaux rencontrés en 2 et 3 et leurs opérations λ. Du fait de 4.3, nous nous intéressons principalement aux anneaux de groupes abéliens et à certains de leurs quotients ([6]).

4.1. *Le λ-anneau* $\mathbf{Z}[G]$

Soit G un groupe abélien noté multiplicativement, $\mathbf{Z}[G]$ son anneau de groupe et $\mathbf{Q}[G]$ la $\mathbf{Q}$-algèbre du groupe G. La formule $\lambda_t(e_g) = 1 + t\,e_g \in \mathbf{Z}[G][[t]]$, $g \in G$, fait de $\mathbf{Z}[G]$ un λ-anneau: il suffit en fait de le montrer pour $\mathbf{Q}[G]$ et, comme il s'agit d'une $\mathbf{Q}$-algèbre, il suffit d'après