

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL

Autor(en): **Henniart, Guy**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-51064>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL

par Guy HENNIART

0. RÉSUMÉ

Soient F un corps local non archimédien, \bar{F} une clôture séparable algébrique de F , et W_F le groupe de Weil de \bar{F} sur F . Soit r une représentation projective de W_F . Nous montrons l'existence de représentations linéaires relevant r et nous étudions leurs propriétés. Si r est primitive, nous déterminons une borne inférieure pour l'exposant du conducteur d'Artin de ces relèvements.

1. INTRODUCTION

1.1 Soit F un corps local non archimédien, à corps résiduel fini de caractéristique p . Soient \bar{F} une clôture séparable algébrique de F , et W_F le groupe de Weil de \bar{F} sur F [We 1, app. II].

La théorie du corps de classes local donne une bijection entre les caractères de W_F , i.e. ses représentations continues de degré 1, et les caractères du groupe multiplicatif F^\times de F .

1.2 R. P. Langlands conjecture qu'il y a une correspondance analogue entre les (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles de W_F dans $GL(n, \mathbf{C})$ et les (classes d'isomorphisme de) représentations supercuspidales de $GL(n, F)$ ¹⁾. Cette correspondance, entre autres propriétés, doit conserver les facteurs L et ε , ainsi que les conducteurs.

De même, il existerait un tel lien entre les représentations irréductibles de W_F dans $SL(n, \mathbf{C})$ (resp. $PGL(n, \mathbf{C})$), et les représentations supercuspidales de $PGL(n, F)$ (resp. $SL(n, F)$) [Bo].

1.3 En fait cette conjecture n'est établie que pour $n = 2$, [JL, Ku, Tu, Yo, Ca, Ge]. On ne possède que des renseignements partiels pour $n > 2$ [Co].

¹⁾ Ici, comme dans toute la suite, par représentation nous entendons représentation continue.

1.4 Nous étudierons ici les représentations de degré n de W_F (le versant dit « galoisien » des conjectures de Landglands) en suivant pour cela la méthode d'A. Weil [We 2].

Elle consiste à déterminer d'abord les représentations *projectives* $r : W_F \rightarrow PGL(n, \mathbb{C})$, puis à trouver les représentations linéaires $R : W_F \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ *relevant* r , c'est-à-dire telles que l'on ait $\pi \circ R = r$, où π est la projection de $GL(n, \mathbb{C})$ sur $PGL(n, \mathbb{C})$

$$\begin{array}{ccc}
 & & W_F \\
 & \swarrow R & \downarrow r \\
 & & PGL(n, \mathbb{C}) \\
 GL(n, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi} & PGL(n, \mathbb{C})
 \end{array}$$

Nous démontrerons, au chapitre 2, le théorème suivant :

THÉORÈME 1.4. *Toute représentation projective de W_F possède un relèvement.*

Ce théorème était déjà connu pour les représentations projectives irréductibles de W_F [We 2, p. 3]. En fait, nous pourrions même obtenir des précisions sur le déterminant des relèvements [He, ch. 5].

1.5 Les différents relèvements d'une représentation projective donnée r diffèrent par torsion par un caractère. Notre but est d'étudier les conducteurs d'Artin de ces relèvements.

Si R est une représentation linéaire de W_F , nous noterons $a(R)$ l'exposant de son conducteur d'Artin, plus brièvement appelé *exposant* de R ; le conducteur d'Artin de R est alors $\mathfrak{c}(R) = \mathfrak{p}_F^{a(R)}$, où \mathfrak{p}_F est l'idéal maximal des entiers \mathfrak{o}_F de F .

Une représentation linéaire est dite *primordiale* si l'on ne peut abaisser son exposant par torsion par un caractère.

THÉORÈME 1.5. *Soit R une représentation linéaire de W_F , irréductible, primordiale et de degré n . Soit χ un caractère de W_F . Alors on a*

$$a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi)).$$

La démonstration de ce théorème utilise la formule $a(R) = n(\alpha(R) + 1)$, valable pour une représentation irréductible et de degré n , où $\alpha(R)$ désigne le plus grand indice u tel que R soit non-triviale sur W_F^u , le sous-groupe de ramification de W_F d'indice u en numérotation supérieure.

1.6 Une représentation projective irréductible de W_F est de *type galoisien*, i.e. d'image finie. Nous sommes plus particulièrement intéressés par celles dont, en outre, aucun relèvement n'est une représentation induite: on les appelle primitives. Ces représentations ont été étudiées par H. Koch [Ko]. En particulier, l'on sait que leur degré est une puissance de la caractéristique résiduelle p de F . On appellera *corps centrique* d'une représentation projective r de type galoisien, l'extension K de F fixée par le noyau de r : elle est finie et galoisienne sur F .

Soit F_1 l'extension modérément ramifiée de F , incluse dans K , et maximale pour ces propriétés. Nous noterons r_1 la restriction de r à W_{F_1} . Si r est primitive, r_1 est irréductible [Ko].

1.7 Nous appellerons *exposant* d'une représentation projective r et nous noterons $a(r)$ le minimum des exposants des relèvements de r .

THÉORÈME 1.7. *Si r est une représentation projective primitive de degré p^d de W_F , les exposants de r et de r_1 vérifient l'égalité suivante :*

$$e a(r) = (e - 1) p^d + a(r_1),$$

où e est l'indice de ramification de F_1 sur F .

Ce théorème est la généralisation de [Bu, Claim 1', p. 29], qui traitait le cas $d = 1$. Ce résultat et le suivant doivent beaucoup à un travail effectué en commun avec J. Buhler au cours de l'été 1977. Les démonstrations s'appuient essentiellement sur les méthodes et les résultats de [Bu]:

THÉORÈME 1.8. *Soit $\alpha = \sup \{ u \mid r(W_F^u) \neq 1 \}$. Alors l'exposant $a(r)$ de r vérifie l'inégalité suivante :*

$$a(r) \geq p^d + (p^d + 1) \alpha.$$

Pour $d = 1$, on a même l'égalité $a(r) = p + (p + 1) \alpha$. Ce résultat est dû à J. Buhler [Bu, Thm. 4, p. 25].

Y a-t-il égalité dans le théorème précédent lorsque $d > 1$? Cette question n'est pas résolue à présent.

1.9 Cet article est une version condensée d'une thèse de 3^e cycle soutenue à Orsay en juin 1978 [He]. Cette thèse a été effectuée sous la direction de M. Cartier. Qu'il trouve ici exprimée ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

2. RELÈVEMENTS

2.1 Le groupe de Weil W_F est défini comme le sous-groupe du groupe de Galois $G_F = \text{Gal}(\bar{F}/F)$ formé des éléments qui agissent sur le corps résiduel k de \bar{F} comme une puissance entière de la transformation de Frobenius. Le groupe d'inertie I_F , formé des éléments qui agissent trivialement sur k , est un sous-groupe ouvert de W_F . Il a la topologie induite par celle de G_F . L'inclusion φ de W_F dans G_F est ainsi continue et son image est dense. Toute représentation de G_F définit donc, par composition avec φ , une représentation de W_F que nous dirons de *type galoisien*. Il est facile de voir qu'une représentation de W_F est de type galoisien si et seulement si son image est finie.

2.2 Rappelons que π désigne la projection de $GL(n, \mathbf{C})$ sur $PGL(n, \mathbf{C})$. Nous appellerons *non-ramifiée* une représentation de W_F qui est triviale sur I_F . Fixons un élément Fr de W_F induisant la transformation de Frobenius sur k . Son image dans $W_F/I_F \simeq \mathbf{Z}$ est alors génératrice. Une représentation non-ramifiée de W_F est déterminée par la donnée de l'image de Fr .

Soient ρ et ρ' deux représentations de W_F à valeurs dans $GL(n, \mathbf{C})$ ou $PGL(n, \mathbf{C})$. Si les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de $\rho'(W_F)$ (on dit, par abus de langage, que ρ et ρ' commutent), l'on définit le *produit* $\rho \cdot \rho'$ par $\rho \cdot \rho'(g) = \rho(g) \rho'(g) = \rho'(g) \rho(g)$ pour $g \in W_F$.

THÉORÈME 2.2. *Soit r une représentation projective de degré n de W_F . Posons $H = \pi^{-1}(r(W_F))$. Alors il existe une représentation non ramifiée $\rho : W_F \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$, telle que les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de H et que la représentation $r \cdot (\pi \circ \rho)$ soit de type galoisien.*

2.3 COROLLAIRE 1. *Toute représentation projective irréductible de W_F est de type galoisien.*

COROLLAIRE 2. *Soit R une représentation linéaire de degré n de W_F . Alors il existe une représentation non-ramifiée $\sigma : W_F \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$ commutant à R , et telle que $R \cdot \sigma$ soit de type galoisien.*

COROLLAIRE 3. *Toute représentation linéaire irréductible R de W_F s'écrit sous la forme $R = S \otimes \chi$ où S est de type galoisien et χ un caractère non-ramifié.*

2.4 *Démontrons le corollaire 1: soient r la représentation projective considérée et ρ la représentation non-ramifiée donnée par le théorème 2.2.*

Comme r est irréductible H est un sous-groupe irréductible de $GL(n, \mathbf{C})$. Mais les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de H . Par suite $\rho(W_F)$ est formé de matrices scalaires et $\pi \circ \rho$ est triviale. Donc r est bien de type galoisien.

Démontrons les corollaires 2 et 3. Soit $R : W_F \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$ une représentation linéaire. Appliquons le théorème 2.2 à $r = \pi \circ R$. On obtient une représentation non-ramifiée ρ , commutant à R , et telle que $r \cdot (\pi \circ \rho)$ soit de type galoisien. Alors, il existe un entier m tel que $r \cdot (\pi \circ \rho)(Fr^m)$ soit trivial dans $PGL(n, \mathbf{C})$; la matrice $R \cdot \rho(Fr^m)$ est scalaire. Or il existe un caractère non ramifié χ de W_F tel que $R \cdot \rho(Fr^m) = \chi(Fr^m) \cdot 1_n$, où 1_n désigne la matrice unité d'ordre n . Ecrivant $S = R \cdot (\rho \otimes \chi^{-1})$, on a $S(Fr^m) = 1_n$, et S est de type galoisien, $\sigma = \rho \otimes \chi^{-1}$ étant une représentation non-ramifiée commutant à R . On a donc démontré le corollaire 2. Si R est irréductible, $\sigma(W_F)$ est formé de matrices scalaires, donc σ définit un caractère non-ramifié χ . On a alors $R = S \otimes \chi$, avec χ non ramifié, d'où le corollaire 3.

2.5 La démonstration du théorème 2.2 utilise un raffinement du raisonnement de [De, p. 542].

Soit r une représentation projective de degré n de W_F . Comme r est continue, elle est triviale sur un sous-groupe ouvert de I_F . Posons $J = \text{Ker}(r | I_F) = \text{Ker}(r) \cap I_F$: ainsi J est invariant dans W_F . L'on fait agir W_F par conjugaison sur I_F/J . Comme I_F/J est fini, une puissance de Fr , disons Fr^m , agit trivialement. Soit $x \in W_F$. On voit que $r(Fr^m)$ commute à $r(x)$. Soient φ et γ des éléments de $GL(n, \mathbf{C})$ tels que $\pi(\varphi) = r(Fr)$ et $\pi(\gamma) = r(x)$. On a ainsi $\varphi^m \gamma = s \gamma \varphi^m$, où s est un nombre complexe non-nul. Prenant le déterminant des deux membres, on obtient $s^n = 1$ et par suite φ^{mn} commute à γ . On en conclut que φ^{mn} commute à tous les éléments de $H = \pi^{-1}(r(W_F))$.

2.6 Nous laissons au lecteur le soin de montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{C}[T]$ tel que:

$$Q(T)^{mn} \equiv T \text{ modulo } P(T),$$

où P désigne le polynôme minimal de φ^{mn} .

Posons $\varphi_o = Q(\varphi^{mn})$. On obtient ainsi une matrice φ_o , commutant à tous les éléments de H et telle que $\varphi_o^{mn} = \varphi^{mn}$. Définissons la représentation non-ramifiée ρ par:

$$\sigma(Fr) = \varphi_o^{-1}.$$

Evidemment $\rho(W_F)$ commute à H et l'on a $r \cdot (\pi \circ \rho)(Fr^{mn}) = \pi(\varphi)^{mn} \pi(\varphi_0)^{-mn} = 1_n$, donc $r \cdot (\pi \circ \rho)$ est de type galoisien. C.Q.F.D.

2.7 THÉORÈME 2.7. *Toute représentation projective de G_F (resp. W_F) possède un relèvement.*

Ce fait est bien connu pour G_F [We 2, p. 2]. Ainsi une représentation projective de type galoisien de W_F a un relèvement de type galoisien.

Pour le cas de W_F (c'est le théorème 1.4 de l'introduction), l'on utilise le théorème 2.2. On a donc une représentation non-ramifiée ρ de W_F , les éléments de $\rho(W_F)$ commutant à ceux de H , et telle que $r \cdot (\pi \circ \rho)$ soit de type galoisien. Il existe un relèvement R de $r \cdot (\pi \circ \rho)$. Mais alors ρ commute à R , puisque les éléments de $\rho(W_F)$ commutent entre eux et à ceux de H . La représentation $R \cdot \rho^{-1}$ est un relèvement de r . C.Q.F.D

3. EXPOSANTS ET CONDUCTEURS

3.1 Si R est une représentation linéaire de W_F , on peut définir, à l'aide de la distribution de Herbrand [We 1, App. I] l'exposant de son conducteur d'Artin, appelé plus brièvement *exposant de R* , et noté $a(R)$. Si R se factorise à travers le groupe fini $G = \text{Gal}(K/F)$, c'est aussi l'exposant, défini dans [Se, p. 107], de la représentation de G que R détermine. Cet exposant ne dépend que de la restriction de R à I_F . Pour une représentation non-ramifiée ρ , on a $a(\rho) = 0$, et si ρ commute à R , on a $a(R) = a(R \cdot \rho)$.

3.2 L'on peut définir, comme dans [Se, p. 83, Rem. 1], les sous-groupes W_F^u de W_F pour $u \in \mathbf{R}$, $u \geq -1$: ce sont les sous-groupes de ramification de W_F en numérotation supérieure. Si $G = \text{Gal}(K/F)$ est un quotient fini W_F/W_K de W_F , on a $G^u = W_K W_F^u/W_K$. On a $W_F^{-1} = W_F$, le groupe W_F^0 est le groupe d'inertie I_F et le groupe d'inertie sauvage P_F est la fermeture de l'union des W_F^ε pour $\varepsilon > 0$.

Si K est une extension galoisienne finie de F et G son groupe de Galois sur F , nous poserons

$$\alpha(K/F) = \sup \{ u \mid G^u \neq 1 \} \quad \text{et} \quad \beta(K/F) = \sup \{ v \mid G_v \neq 1 \}.$$

On a

$$\beta(K/F) = \psi_{K/F}(\alpha(K/F)) \quad \text{et} \quad \alpha(K/F) = \varphi_{K/F}(\beta(K/F))$$

où $\varphi_{K/F}$ et $\psi_{K/F}$ sont les fonctions de Herbrand [Se, p. 80].

3.3 Soit R une représentation linéaire de W_F . Si R est triviale, posons $\alpha(R) = 0$. Sinon, nous noterons $\alpha(R)$ le plus grand indice u tel que l'image de $R(W_F^u)$ soit non-triviale. Un tel $\alpha(R)$ est bien défini: si R est non-ramifiée, on a $R(W_F) \neq 1$ et $R(W_F^\varepsilon) = 1$ pour $\varepsilon > -1$, d'où $\alpha(R) = -1$. Si R est ramifiée, prenons une représentation non ramifiée ρ , commutant à R , et telle que $R \cdot \rho$ soit galoisienne. Soit K le corps fixé par le noyau de $R \cdot \rho$. Alors $\alpha(R \cdot \rho)$ existe et vaut $\alpha(K/F)$. Mais il est clair que pour $u > -1$, on a $R \cdot \rho(W_F^u) = R(W_F^u)$. Ainsi $\alpha(R)$ est défini et vaut $\alpha(K/F)$.

3.4 Il est bien connu que si χ est un caractère de W_F , alors on a

$$a(\chi) = \alpha(\chi) + 1 \quad [\text{Se, p. 109, prop. 5}].$$

Nous voulons généraliser cette formule. Nous dirons qu'une représentation linéaire R de W_F possède la propriété A si la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)}$ est sans point fixe non-trivial.

Il est clair qu'une représentation irréductible R vérifie la propriété A : en effet, comme $W_F^{\alpha(R)}$ est invariant dans W_F , la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)}$ a des composantes irréductibles conjuguées entre elles; cette restriction étant non-triviale, aucune composante ne peut être triviale.

3.5 La proposition suivante est une traduction de [Se, p. 108, Cor. 1]:

PROPOSITION 3.5. Soit R une représentation linéaire de W_F se factorisant par le groupe fini $G = \text{Gal}(K/F)$. Alors on a

$$a(R) = \frac{1}{|G_o|} \sum_{v=0}^{\infty} |G_v| \text{codim}(V^{G_v}),$$

où V^{G_v} désigne l'espace des points fixes par le groupe G_v .

THÉORÈME 3.5. Soit R une représentation linéaire de degré n de W_F , vérifiant la propriété A . Alors on a $a(R) = n(\alpha(R) + 1)$.¹⁾

Démonstration. C'est clair si R est non-ramifiée. Si R est ramifiée, on peut, par le théorème 2.2, se ramener à R de type galoisien se factorisant par le groupe fini $G = \text{Gal}(K/F)$.

Alors

$$a(R) = \frac{1}{|G_o|} \sum_{v=0}^{\beta} \text{codim}(V^{G_v}) \cdot |G_v|,$$

¹⁾ Cette formule avait été signalée, sans démonstration, dans une prépublication de R. Howe.

où $\beta = \beta(K/F)$. Mais on a $G_\beta = W_F^{\alpha(R)} \cdot W_K/W_K$ et R vérifie la propriété A . Par suite on a $\dim V^{G_\beta} = 0$ et aussi $\dim V^{G_v} = 0$ pour $v \leq \beta$. On a donc

$$a(R) = n \sum_{v=0}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|} = n \left(1 + \sum_{v=1}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|} \right) = n(1 + \alpha(K/F)),$$

d'où $a(R) = n(1 + \alpha(R))$. C.Q.F.D.

3.6 COROLLAIRE 1. Soient R et S deux représentations linéaires de W de degrés n et m respectivement. Supposons que R, S et $R \otimes S$ vérifient la propriété A . Alors on a $a(R \otimes S) \leq \sup(ma(R), na(S))$ avec égalité si $ma(R) \neq na(S)$.

Rappelons qu'une représentation linéaire est dite *primordiale* si l'on ne peut abaisser son exposant en la tordant par un caractère. Le corollaire 2 implique immédiatement le théorème 1.5.

COROLLAIRE 2. Soit R une représentation linéaire de W_F , primordiale, de degré n , et vérifiant la propriété A . Soit χ un caractère de W_F . Alors on a $a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi))$.

3.7 Démonstration des corollaires. Le théorème 3.5 nous permet d'écrire

$$\alpha(R) + 1 = \frac{a(R)}{n} \quad \text{et} \quad \alpha(S) + 1 = \frac{a(S)}{m}.$$

Mais il est clair que l'on a $\alpha(R \otimes S) \leq \sup(\alpha(R), \alpha(S))$, avec l'égalité si $\alpha(R) \neq \alpha(S)$. On en déduit le corollaire 1. Prenant $S = \chi$, on obtient le corollaire 2, puisque, par hypothèse, on a toujours $a(R \otimes \chi) \geq a(R)$. C.Q.F.D.

Une conséquence immédiate du corollaire 2 est la remarque suivante:

Remarque 3.7. Soit R une représentation linéaire de W_F , irréductible et de degré n . Si $a(R)$ n'est pas multiple de n , R est primordiale.

4. CARACTÈRES CENTRIQUES

4.1 *Rappel et notations.* Si L est une extension finie de F , nous noterons $\tau_L : W_L \rightarrow L^\times$ l'application de *réciprocité* définie par la théorie du corps de classes local. On sait qu'elle donne une bijection entre les caractères de L^\times et ceux de W_L , par la formule $\chi \rightarrow \chi \circ \tau_L$.

On a également $\tau_L(W_L^u) = U_L^{\lceil u \rceil}$ pour $u > -1$ où $\lceil u \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à u , et U_L^m est le groupe des unités de l'anneau des entiers \mathfrak{o}_L de L , congrues à 1 modulo la puissance m^e de l'idéal maximal \mathfrak{p}_L .

4.2 Dans toute la suite, r désignera une représentation projective de degré n de W_F , de type galoisien. On notera K le corps centrique de r (c'est le corps fixé par $\text{Ker}(r)$), et G le groupe $\text{Gal}(K/F)$.

Nous étudierons les relèvements R de r . On définit le caractère centrique χ_R de R , qui est un caractère de K^\times , par la formule $R(g) = \chi_R \circ \tau_K(g) \cdot 1_n$ pour $g \in W_K$, où 1_n désigne la matrice d'unité d'ordre n .

Les relèvements de r diffèrent par un caractère de W_F . Si l'on tord R par $\alpha \circ \tau_F$, où α est un caractère de F^\times , le caractère χ_R est tordu par $\alpha \circ N_{K/F}$, où $N_{K/F}$ est la norme de K^\times à F^\times . Par suite, r détermine la restriction χ_r de χ_R à K^N , noyau de $N_{K/F}$.

Comme χ_R est invariant par G , χ_r est trivial sur K^I , le sous-groupe de K^\times engendré par les éléments x^{s-1} , $x \in K^\times$, $s \in G$. Donc χ_r définit un caractère de $H^{-1}(G, K^\times) = K^N/K^I$. On peut donner une formule cohomologique pour χ_r et prouver la proposition suivante [Bu, Th. 1] ou [He, chap. 6]:

PROPOSITION 4.2. *Un caractère χ de K^\times est le caractère centrique d'un relèvement de r si et seulement s'il prolonge χ_r .*

4.3 Nous noterons $a(\chi)$ l'exposant du caractère χ de K^\times , à savoir le plus petit entier m tel que χ soit trivial sur U_K^m . On a $a(\chi) = a(\chi \circ \tau_K)$. Nous notons $e(K/F)$ l'indice de ramification de K sur F , et $d(K/F)$ l'exposant différentiel de cette extension.

THÉORÈME 4.3. *Soit R un relèvement de r , tel que l'image par R de $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$ ne laisse fixe aucun élément non nul de \mathbb{C}^n . Alors on a :*

$$e(K/F) a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$

et

$$a(\chi_R) \geq \beta(K/F) + 1.$$

Cette dernière inégalité est stricte si W_K contient $W_F^{\alpha(R)}$.

L'égalité concernant $a(R)$ découle immédiatement de [Bu, prop. 2, p. 25]. Pour une généralisation, voir [He, chap. 7].

4.4 L'inégalité à démontrer s'écrit encore

$$e(K/F) a(R) \geq n(d(K/F) + \beta(K/F) + 1).$$

Par hypothèse, la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)} \cap W_K$ est sans point fixe non-trivial. Par suite, R vérifie la propriété A , et, utilisant le théorème 3.5, l'on voit qu'il faut démontrer:

$$e(K/F)(\alpha(R) + 1) \geq d(K/F) + \beta(K/F) + 1.$$

LEMME 4.4. *On a*

$$e(K/F)(\alpha(K/F) + 1) = d(K/F) + \beta(K/F) + 1.$$

Démonstration. Rappelons que $G = \text{Gal}(K/F)$. Par [Se, prop. 4, p. 72], on a

$$d(K/F) = \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i| - 1) = \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} (|G_i| - 1)$$

d'où

$$\begin{aligned} d(K/F) + \beta(K/F) + 1 &= \sum_{i=0}^{\beta(K/F)} |G_i| = |G_0| \left(1 + \sum_{i=1}^{\beta(K/F)} \frac{|G_i|}{|G_0|} \right) = \\ &= |G_0| (1 + \varphi_{K/F}(\beta(K/F))) = e(K/F)(\alpha(K/F) + 1) \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

4.5 Il suffit donc de démontrer l'inégalité $\alpha(R) \geq \alpha(K/F)$, qui est claire puisque la restriction de r à $W_F^{\alpha(K/F)}$, donc aussi celle de R , est non-triviale. De plus, si l'on a $W_F^{\alpha(R)} \subset W_K$, on a $W_F^{\alpha(R)} \subsetneq W_F^{\alpha(K/F)}$ d'où $\alpha(R) > \alpha(K/F)$ et l'inégalité est stricte. C.Q.F.D.

La remarque 1 qui suit [Bu, prop. 2, p. 25] donne aussitôt le corollaire suivant au théorème 4.3:

COROLLAIRE. *Si la restriction de r à P_F est irréductible, on a*

$$e(K/F) a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$

et

$$a(\chi_R) > \beta(K/F) + 1.$$

5. REPRÉSENTATIONS PRIMITIVES

5.1 Nous conservons les hypothèses et notations précédentes. Ainsi r est une représentation projective de W_F , de type galoisien et de degré n . On notera F_1 la plus grande extension modérément ramifiée de F contenue dans le corps centrique K de r , et r_1 la restriction de r à W_{F_1} . Le groupe $G_1 = \text{Gal}(K/F_1)$ est le sous-groupe de ramification sauvage de $G = \text{Gal}(K/F)$.

Nous nous intéressons aux représentations r vérifiant:

- 1) $n > 1$;
- 2) r_1 est irréductible.

Ces hypothèses sont vérifiées si r est *primitive* non-triviale (voir [Ko], où l'on trouvera une description des représentations projectives primitives de W_F).

5.2 Comme r_1 est irréductible, sa restriction à P_F l'est aussi. On peut donc appliquer à r et r_1 le corollaire au théorème 4.3.

Soit R un relèvement de r ; on notera R_1 la restriction de R à W_{F_1} . Soit ρ un relèvement de r_1 . On a alors

$$e(K/F) a(R) = n(d(K/F) + a(\chi_R))$$

et

$$e(K/F) a(\rho) = n(d(K/F_1) + a(\chi_\rho)).$$

Remarque. De ces deux formules avec $\rho = R_1$, on tire (car $\chi_R = \chi_{R_1}$) $e a(R) = n(e-1) + a(R_1)$, où $e = e(F_1/F)$.

Cette dernière égalité peut être généralisée, cf. [He, chap. 7].

De plus l'on a $a(\chi_\rho) > \beta(K/F_1) + 1$.

5.3 Appelons $b(r)$ (resp. $b(r_1)$) le minimum des $a(\chi_R)$ (resp. $a(\chi_\rho)$) quand R (resp. ρ) parcourt l'ensemble des relèvements de r (resp. r_1).

Supposons que l'on ait $b(r) = b(r_1)$. Prenons R tel que $a(\chi_R) = b(r)$. On a alors $a(R) = a(r)$ et $a(R_1) = a(r_1)$, puisque $\chi_{R_1} = \chi_R$. Par suite, on a l'égalité

$$e a(r) = n(e-1) + a(r_1).$$

Le théorème suivant généralise légèrement le théorème 1.7 de l'introduction:

THÉORÈME 5.3. *Soit r une représentation projective de W_F , de degré $n > 1$ et de type galoisien. Supposons que r_1 soit irréductible. Alors on a $b(r) = b(r_1)$ et $e a(r) = n(e-1) + a(r_1)$, où l'on a posé $e = e(F_1/F)$.*

5.4 *Démonstration.* Il suffit de prouver la première égalité. Mais d'après 5.2, on a $b(r_1) > \beta(K/F_1) + 1$. Le théorème 5.3 est alors une conséquence directe de la proposition suivante:

PROPOSITION 5.4. Soit r une représentation projective de type galoisien de W_F . Si l'on a $b(r_1) > \beta(K/F_1)$, alors on a $b(r) = b(r_1)$.

Comme en 4.2, on définit le caractère χ_r de K^N , noyau de la norme de K^\times à F^\times . De même, on définit le caractère χ_{r_1} de K^{N_1} , noyau de la norme de K^\times à F^\times . Alors $b(r)$ est le plus petit entier $m \geq 0$ tel que l'on puisse étendre χ_r en un caractère de K^\times trivial sur U_K^m . Par le lemme d'extension de [Bu, p. 14], c'est aussi le plus petit entier $m \geq 0$ tel que χ_r soit trivial sur $K^N \cap U_K^m$. On a un résultat analogue pour r_1 .

5.5 Il est clair que χ_{r_1} est la restriction de χ_r à K^{N_1} . Par conséquent, on a $b(r) \geq b(r_1)$. Remarquant que χ_r est trivial sur K^I , on voit que la proposition 5.4 découle, de façon évidente du lemme suivant:

LEMME 5.5. Soit m un entier strictement supérieur à $\beta(K/F_1)$. Alors on a

$$K^N \cap U_K^m = (K^{N_1} \cap U_K^m) \cdot (K^I \cap U_K^m).$$

Nous suivrons, pour démontrer ce lemme, l'argument de [Bu, p. 30]. Supposons $m > \beta(K/F_1)$, et prenons $x \in K^N \cap U_K^m$. Le lemme de [Bu, p. 30] nous dit que $H^{-1}(\text{Gal}(F_1/F), U_{F_1}^m)$ est nul. Il nous permet d'écrire

$$N_{K/F_1}(x) = \prod_{i=1}^v \bar{y}_i^{s_i-1}, \text{ où les } \bar{y}_i \text{ appartiennent à } U_{F_1}^{m'}, m' \text{ étant le}$$

plus petit entier supérieur ou égal à $\varphi_{K/F_1}(m)$, et où les $s_i, i = 1, \dots, v$, sont des éléments de G dont les images dans $\text{Gal}(F_1/F)$ engendrent ce groupe.

Comme on a $m > \beta(K/F_1)$, \bar{y}_i est la norme de K à F_1 d'un élément y_i de U_K^m [Se, chap. V, § 6]. On peut donc écrire:

$$x = x' \prod_{i=1}^v y_i^{s_i-1} \text{ avec } x' \in U_K^m \text{ et } N_{K/F_1}(x') = 1.$$

Par suite

$$x \in (U_K^m \cap K^{N_1}) \cdot (K^I \cap U_K^m)$$

et l'on a

$$K^N \cap U_K^m \subset (U_K^m \cap K^{N_1}) \cdot (K^I \cap U_K^m),$$

d'où l'égalité puisque l'inclusion dans l'autre sens est évidente. Ceci prouve le lemme 5.5 et donc le théorème 5.3.

6. MINORATIONS D'EXPOSANTS

6.1 Dans ce chapitre, nous démontrerons le théorème 1.8. Nous conservons les notations précédentes et supposons de plus r primitive. Il nous faut rappeler brièvement quelques résultats de [Ko].

Nous avons déjà dit que r_1 est irréductible; ceci entraîne que le degré n de r est une puissance de la caractéristique résiduelle p de F , disons $n = p^d$, $d \geq 1$. Le degré de K sur F_1 est alors p^{2d} et l'on démontre que le groupe $V = G_1 = \text{Gal}(K/F_1)$ est un groupe abélien d'exposant p ; on peut donc le considérer comme un espace vectoriel de dimension $2d$ sur le corps fini F_p à p éléments.

6.2 Sur cet espace vectoriel, r_1 définit une forme symplectique f , à valeurs dans μ_p , le groupe des racines de l'unité d'ordre p dans C^x , autrement dit, f est une application bilinéaire alternée de $V \times V$ dans μ_p , μ_p étant considéré de façon évidente comme un espace vectoriel sur F_p .

Pour définir f , prenons un relèvement R_1 de r_1 . Si a (resp. b) est un élément de V , prenons un représentant \bar{a} (resp. \bar{b}) de a (resp. b) dans W_{F_1} . Alors $R_1(\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1})$ s'écrit sous la forme $f(a, b) 1_{p^d}$, où 1_{p^d} est la matrice d'unité d'ordre p^d : en effet, $r_1(\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1})$ est trivial. H. Koch montre que l'on a $f(a, b) \in \mu_p$ et que f est symplectique.

Le fait que r_1 soit *irréductible* équivaut au fait que f soit non-dégénérée.

Le groupe $G = \text{Gal}(K/F)$ agit par conjugaison sur V en respectant la forme symplectique f . Cette action se factorise en fait par $\text{Gal}(F_1/F)$. On peut exprimer le fait que r est *primitive*, en disant que V ne contient aucun sous-module sur G qui soit totalement isotrope.

6.3 L'on peut facilement construire des relèvements de r_1 . Soit X un sous-espace lagrangien de V , i.e. un sous-espace totalement isotrope maximal. Soit E l'extension de F_1 fixée par X . On a alors $[K : E] = [E : F_1] = p^d$ et il existe un caractère χ de W_F tel que la représentation induite de χ à W_{F_1} relève r_1 .

Inversement, si E est une extension de F_1 telle qu'un caractère de W_E induise un relèvement de r_1 , alors E est incluse dans K et $X = \text{Gal}(K/E)$ est un sous-espace lagrangien de V . De plus, tout relèvement de r_1 est induit à partir de W_E .

6.4 L'on peut donner une condition *nécessaire* (et suffisante si $d=1$) pour que le caractère χ de W_E induise à W_{F_1} un relèvement de r_1 .

Posons $H = V/X = \text{Gal}(E/F_1)$. Soit s un élément de H . Définissons le caractère λ_s de W_E de la façon suivante: si $x \in W_E$, on note $\pi_X(x)$ sa projection dans X , et on appelle \bar{s} un représentant quelconque de s dans V . Alors λ_s est donné par la formule suivante:

$$\lambda_s(x) = f(\bar{s}, \pi_X(x)) \quad \text{pour } x \in W_E .$$

On vérifie facilement que l'application $s \mapsto \lambda_s$ est un homomorphisme de H dans le groupe des caractères de W_E triviaux sur W_K . De plus, comme K est une extension abélienne de F_1 , H agit trivialement (par conjugaison) sur W_E/W_K , et λ_s est invariant par H .

Remarques. 1) f étant non-dégénérée, le caractère λ_s est non-trivial pour $s \in H, s \neq 1$.

2) E étant galoisienne sur F_1 , le groupe H agit sur les caractères de W_E par $\chi^s(x) = \chi(\sigma x \sigma^{-1})$, où σ est un représentant dans W_{F_1} de l'élément s de H .

PROPOSITION 6.4. Soit χ un sous-espace lagrangien de V fixant le corps E . Soit χ un caractère de W_E . Si χ induit à W_{F_1} un relèvement de r_1 , l'on a $\chi^{s^{-1}} = \lambda_s$ pour tout élément s de H . Si $d = 1$, cette dernière condition est suffisante pour que χ induise un relèvement de r_1 .

6.5 *Démonstration.* Montrons d'abord la nécessité de la condition: posons $\rho = \text{Ind}_{W_{F_1}}^{W_E} \chi$. Si $s \in H$ et $x \in W_E$, on a

$$\chi^{s^{-1}}(x) = \chi(\sigma x \sigma^{-1} x^{-1}),$$

où σ est un représentant (quelconque) de s dans W_{F_1} .

Mais comme le commutateur $\sigma x \sigma^{-1} x^{-1}$ est dans W_K , la matrice $\rho(\sigma x \sigma^{-1} x^{-1})$ est la matrice scalaire

$$\chi(\sigma x \sigma^{-1} x^{-1}) \cdot 1_{p^d}.$$

Par suite, si \bar{s} est l'image de σ dans V , on a:

$$\chi^{s^{-1}}(x) = f(\bar{s}, \pi_X(x)) = \lambda_s(x) \quad \text{i.e. } \chi^{s^{-1}} = \lambda_s .$$

Si $d = 1$, E est une extension cyclique de F , de degré premier, et il existe un caractère χ_o de W_E tel que χ_o induise un relèvement de r_1 . On a donc $\chi_o^{s^{-1}} = \lambda_s$. Mais il résulte de [Bu, p. 33] que le caractère χ de W_E induit un relèvement de r_1 si et seulement si on a $\chi^{s^{-1}} = \chi_o^{s^{-1}}$, i.e. $\chi^{s^{-1}} = \lambda_s$.

On a démontré la proposition 6.4.

6.6 Le théorème 1.8 de l'introduction dit que l'exposant de r vérifie l'inégalité

$$a(r) \geq p^d + (p^d + 1) \alpha(K/F), \quad \text{avec égalité si } d = 1.$$

On a noté en 5.3 l'égalité $e a(r) = p^d (e-1) + a(r_1)$. Le lecteur vérifiera sans peine que l'on a en outre $\alpha(K/F_1) = e \alpha(K/F)$. Il nous suffit donc de démontrer l'inégalité

$$a(r_1) \geq p^d + (p^d + 1) \alpha(K/F_1), \quad \text{avec égalité si } d = 1.$$

Remarquons que le théorème de Hasse-Arf appliqué à l'extension abélienne K de F_1 nous dit que $\alpha(K/F_1)$ est un entier.

6.7 Prenons donc un sous-espace lagrangien X de V , fixant l'extension E de F_1 , et choisissons un caractère χ de W_F qui induise à W_{F_1} un relèvement ρ de r_1 .

Soit s un élément non-trivial de $H = \text{Gal}(E/F_1)$. Alors $\chi^{s^{-1}} = \lambda_s$ définit une extension E_s de E , contenue dans K , totalement (et sauvagement) ramifiée de degré p sur E : en effet, la restriction de ρ à W_E est somme des caractères χ^s pour $s \in H$. Comme ρ est irréductible, ces caractères sont tous distincts et $\chi^{s^{-1}}$ est non-trivial. Comme l'image par ρ de W_K est formée de matrices scalaires, $\chi^{s^{-1}}$ est trivial sur W_K . Par suite l'extension E_s de E fixée par $\text{Ker}(\chi^{s^{-1}})$ est contenue dans K , cyclique sur E , donc de degré p sur E .

Nous noterons L_s le corps des invariants de s dans E d'où $[E : L_s] = p$.

Le groupe de Galois de E sur L_s est le groupe H_s engendré par s . Celui de K sur L_s est l'image réciproque V_s dans V , du sous-espace H_s de H . Celui de K sur E_s est l'orthogonal V_s^\perp de V_s . Enfin, celui de E_s sur E est X/V_s^\perp .

6.8 Le caractère χ de W_E induit à W_{L_1} une représentation irréductible de degré p de W_{L_s} . La représentation projective correspondante a pour noyau W_{E_s} , comme il est facile de le vérifier. Soit a_s l'exposant du conducteur de E_s sur E :

$$a_s = a(\chi^{s^{-1}}) = a(\lambda_s).$$

La proposition 3 de [Bu, p. 31] peut alors se traduire en l'inégalité $a(\chi) \geq a_s + \beta(E/L_s)$.

Si $d = 1$ cette valeur $a_s + \beta(E/L_s)$ est d'ailleurs exactement la valeur minimale des $a(\chi)$, où χ parcourt les caractères de W_E induisant un relèvement de r_1 .

Choisissant bien le sous-espace lagrangien X , nous essaierons d'évaluer a_s et $\beta(E/L_s)$.

6.9 Rappelons que $\alpha(K/F_1)$ est le plus grand indice $m \geq 0$ tel que le sous-groupe de ramification V^m de V soit non nul. Mais le groupe $\text{Gal}(F_1/F)$ agit par conjugaison sur V_1 en respectant la forme symplectique f associée à r , et les V^m sont des sous-modules de V pour cette action. Mais l'on sait que V ne possède pas de sous-module totalement isotrope non-trivial.

On en déduit d'abord que la restriction de f à V^m est non-dégénérée si V^m est non-trivial, et aussi que si V^m est non-trivial, V^m n'est pas inclus dans X ; l'image de V^m dans $H = V/X$, qui est égale à H^m , est alors non-triviale. On a donc démontré la propriété suivante:

LEMME 6.9. *On a $\alpha(K/F_1) = \alpha(E/F_1)$.*

6.10 Il nous faut maintenant choisir convenablement l'espace lagrangien X .

Commençons par prendre un sous-espace lagrangien \tilde{X} de $V_{\beta(K/F_1)} = V^{\alpha(K/F_1)}$. Prolongeons \tilde{X} en un sous-espace lagrangien \tilde{X} de V . Alors on a $\tilde{X} = X_{\beta(K/F_1)}$ et si E est l'extension fixée par X , on a $\beta(K/E) = \beta(K/F_1)$.

Choisissons deux éléments \bar{s} et \bar{s}_1 de $V_{\beta(K/F_1)}$ et $X_{\beta(K/F_1)}$ respectivement, de façon que l'on ait $f(\bar{s}, \bar{s}_1) \neq 1$. Alors \bar{s} définit un élément s non-trivial de $H = V/X$.

Soit E_s le corps fixé par l'orthogonal de \bar{s} dans X . L'image s_1 de \bar{s}_1 dans $\text{Gal}(E_s/E)$ engendre ce groupe. Mais \bar{s}_1 appartient à $X_{\beta(K/E)} = X^{\alpha(K/E)}$. Si donc on appelle Y le groupe $\text{Gal}(E_s/E)$, les groupes de ramification de Y en numérotation supérieure sont $Y^i = Y$ pour $0 \leq i \leq \alpha(K/E)$ et $Y^i = 1$ pour $i > \alpha(K/E)$.

Mais

$$\alpha(K/E) = \varphi_{K/E}(\beta(K/E)) = \varphi_{K/E}(\beta(K/F_1)) = \varphi_{K/E} \psi_{K/F_1}(\alpha(K/F_1))$$

$$\alpha(K/E) = \varphi_{K/E} \circ \psi_{K/E} \circ \psi_{E/F_1}(\alpha(K/F_1)) = \psi_{E/F_1}(\alpha(K/F_1)).$$

Par suite, le conducteur de E_s sur E est

$$\alpha(K/E) + 1 \geq \alpha(K/F_1) + 1.$$

Remarque. S'il n'y a qu'un seul saut dans la ramification de V (i.e. si $V = V_{\beta(K/F_1)}$) alors on a $\alpha(K/E) = \alpha(K/F_1)$ comme le lecteur le vérifiera

aisément. C'est le cas en particulier si $d = 1$ et plus généralement si V est un module irréductible sur $\text{Gal}(F_1/F)$.

6.11 On a ainsi obtenu l'inégalité

$$a(\chi) \geq \beta(E/L_s) + \alpha(K/F_1) + 1,$$

où L_s est le corps fixé par s dans E . Mais s est un élément de $H^{\alpha(K/F_1)} = H^{\alpha(K/F_1)} = H_{\beta(E/F_1)}$. Par conséquent, on a $\beta(E/L_s) = \beta(E/F_1)$.

D'après le théorème donnant le conducteur d'une représentation induite [Se, p. 109, Cor.], on a

$$a(\rho) = d(E/F_1) + a(\chi)$$

donc

$$a(\rho) \geq d(E/F_1) + \beta(E/F_1) + 1 + \alpha(K/F_1)$$

$$a(\rho) \geq p^d(\alpha(K/F_1) + 1) + \alpha(K/F_1). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour $d = 1$, la remarque de 6.10 et la proposition 3 de [Bu, p. 31] donnent l'égalité

$$a(r) = p^d(\alpha(K/F_1) + 1) + \alpha(K/F_1).$$

6.12 Supposons que le groupe V soit un module irréductible pour l'action de $\text{Gal}(F_1/F)$. A-t-on alors l'égalité dans le théorème 1.8? Cette question reste ouverte.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bo] BOREL, A. Formes automorphes et séries de Dirichlet. *Séminaire Bourbaki*, 1974/75, n° 466, pp. 1-34.
- [Bu] BUHLER, J. *Icosahedral Galois Representations*. Lecture Notes in Math. n° 654, Springer, Berlin 1978.
- [Ca] CARTIER, P. La conjecture de Langlands dans le cas 2-adique. *Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes*, Université de Paris VII, 1977.
- [Co] *Automorphic forms, representations and L-functions*. A.M.S. Summer Institute, Corvallis, juillet 1977 (à paraître).
- [De] DELIGNE, P. Les constantes des équations fonctionnelles. *Modular functions of one variable II*. Lectures Notes in Math. n° 349, Springer, Berlin, 1973.
- [Ge] GÉRARDIN, P. Facteurs locaux des algèbres simples de rang 4. *Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes*, Université de Paris VII, 1977 (paru dans le n° 1 des publications mathématiques de l'Université de Paris VII).
- [He] HENNIART, G. *Représentations du groupe de Weil d'un corps local*. Thèse de 3^e cycle, à paraître aux publications mathématiques de l'Université de Paris-Sud.

- [Ko] KOCH, H. Classification of the primitive representations of the Galois group of local fields. *Inv. Math.* 40 (1977), pp. 195-216.
- [Ku] KUTZKO, Ph.
- [J L] JACQUET, H. and R. P. LANGLANDS. *Automorphic forms on $GL(2)$* . Lectures Notes in Maths. n° 114, Springer, Berlin, 1970.
- [Se] SERRE, J.-P. *Corps locaux*. 2^e ed. Hermann, Paris, 1968.
- [Tu] TUNNELL, J. B. On the local Langlands conjecture for $GL(2)$. *Inv. Math.* 46 (1978), pp. 179-200.
- [We 1] WEIL, A. *Basic number theory*. 3^e ed. Springer, Berlin, 1974.
- [We 2] ——— Exercices dyadiques. *Inv. Math.* 27 (1974), pp. 1-22.
- [Vo] YOSHIDA, H. On extraordinary representations of $GL(2)$. *Algebraic number theory*, edited by S. Iyanaga, Japan Society for the promotion of Science, Tokyo 1977, pp. 291-303.

(Reçu le 21 mars 1979)

Guy Henniart
11, rue Ruhmkorff
F-75017 Paris