2. Relèvements

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

2. Relèvements

2.1 Le groupe de Weil W_F est défini comme le sous-groupe du groupe de Galois $G_F = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ formé des éléments qui agissent sur le corps résiduel k de $\bar{F}$ comme une puissance entière de la transformation de Frobenius. Le groupe d'inertie I_F, formé des éléments qui agissent trivialement sur k, est un sous-groupe ouvert de W_F. Il a la topologie induite par celle de G_F. L'inclusion φ de W_F dans G_F est ainsi continue et son image est dense. Toute représentation de G_F définit donc, par composition avec φ, une représentation de W_F que nous dirons de *type galoisien.* Il est facile de voir qu'une représentation de W_F est de type galoisien si et seulement si son image est finie.

2.2 Rappelons que π désigne la projection de $GL(n, \mathbf{C})$ sur $PGL(n, \mathbf{C})$. Nous appellerons *non-ramifiée* une représentation de W_F qui est triviale sur I_F. Fixons un élément Fr de W_F induisant la transformation de Frobenius sur k. Son image dans $W_F/I_F \simeq \mathbf{Z}$ est alors génératrice. Une représentation non-ramifiée de W_F est déterminée par la donnée de l'image de Fr.

Soient ρ et ρ' deux représentations de W_F à valeurs dans $GL(n, \mathbf{C})$ ou $PGL(n, \mathbf{C})$. Si les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de $\rho'(W_F)$ (on dit, par abus de langage, que ρ et ρ' commutent), l'on définit *le produit* $\rho \,.\, \rho'$ par $\rho \,.\, \rho'(g) = \rho(g)\,\rho'(g) = \rho'(g)\,\rho(g)$ pour $g \in W_F$.

Théorème 2.2. *Soit r une représentation projective de degré n de W_F. Posons $H = \pi^{-1}(r(W_F))$. Alors il existe une représentation non ramifiée $\rho : W_F \to GL(n, \mathbf{C})$, telle que les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de H et que la représentation $r \,.\, (\pi \circ \rho)$ soit de type galoisien.*

2.3 Corollaire 1. *Toute représentation projective irréductible de W_F est de type galoisien.*

Corollaire 2. *Soit R une représentation linéaire de degré n de W_F. Alors il existe une représentation non-ramifiée $\sigma : W_F \to GL(n, \mathbf{C})$ commutant à R, et telle que $R \,.\, \sigma$ soit de type galoisien.*

Corollaire 3. *Toute représentation linéaire irréductible R de W_F s'écrit sous la forme $R = S \otimes \chi$ où S est de type galoisien et χ un caractère non-ramifié.*

2.4 *Démontrons le corollaire* 1: soient r la représentation projective considérée et ρ la représentation non-ramifiée donnée par le théorème 2.2.

Comme r est irréductible H est un sous-groupe irréductible de $GL(n, \mathbf{C})$. Mais les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de H. Par suite $\rho(W_F)$ est formé de matrices scalaires et $\pi \circ \rho$ est triviale. Donc r est bien de type galoisien.

Démontrons les corollaires 2 et 3. Soit $R : W_F \to GL(n, \mathbf{C})$ une représentation linéaire. Appliquons le théorème 2.2 à $r = \pi \circ R$. On obtient une représentation non-ramifiée ρ, *commutant à* R, et telle que $r \,.\, (\pi \circ \rho)$ soit de type galoisien. Alors, il existe un entier m tel que $r \,.\, (\pi \circ \rho)(Fr^m)$ soit trivial dans $PGL(n, \mathbf{C})$; la matrice $R \,.\, \rho(Fr^m)$ est scalaire. Or il existe un caractère non ramifié χ de W_F tel que $R \,.\, \rho(Fr^m) = \chi(Fr^m) \,.\, 1_n$, où 1_n désigne la matrice unité d'ordre n. Ecrivant $S = R \,.\, (\rho \otimes \chi^{-1})$, on a $S(Fr^m) = 1_n$, et S est de type galoisien, $\sigma = \rho \otimes \chi^{-1}$ étant une représentation non-ramifiée commutant à R. *On a donc démontré le corollaire 2.* Si R est irréductible, $\sigma(W_F)$ est formé de matrices scalaires, donc σ définit un caractère non-ramifié χ. On a alors $R = S \otimes \chi$, avec χ non ramifié, d'où *le corollaire 3.*

2.5 La démonstration du théorème 2.2 utilise un raffinement du raisonnement de [De, p. 542].

Soit r une représentation projective de degré n de W_F. Comme r est continue, elle est triviale sur un sous-groupe ouvert de I_F. Posons $J = \mathrm{Ker}(r \mid I_F) = \mathrm{Ker}(r) \cap I_F$: ainsi J est invariant dans W_F. L'on fait agir W_F par conjugaison sur I_F/J. Comme I_F/J est fini, une puissance de Fr, disons Fr^m, agit trivialement. Soit $x \in W_F$. On voit que $r(Fr^m)$ commute à $r(x)$. Soient φ et γ des éléments de $GL(n, \mathbf{C})$ tels que $\pi(\varphi) = r(Fr)$ et $\pi(\gamma) = r(x)$. On a ainsi $\varphi^m \gamma = s \gamma \varphi^m$, où s est un nombre complexe non-nul. Prenant le déterminant des deux membres, on obtient $s^n = 1$ et par suite φ^{mn} commute à γ. On en conclut que φ^{mn} commute à tous les éléments de $H = \pi^{-1}(r(W_F))$.

2.6 Nous laissons au lecteur le soin de montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{C}[T]$ tel que:

$$Q(T)^{mn} \equiv T \text{ modulo } P(T),$$

où P désigne le polynôme minimal de φ^{mn}.

Posons $\varphi_o = Q(\varphi^{mn})$. On obtient ainsi une matrice φ_o, commutant à tous les éléments de H et telle que $\varphi_o^{mn} = \varphi^{mn}$. Définissons la représentation non-ramifiée ρ par:

$$\sigma(Fr) = \varphi_o^{-1}.$$

Evidemment $\rho(W_F)$ commute à H et l'on a $r.(\pi\circ\rho)(Fr^{mn}) = \pi(\varphi)^{mn}$ $\pi(\varphi_o)^{-mn} = 1_n$, donc $r.(\pi\circ\rho)$ est de type galoisien. C.Q.F.D.

2.7 THÉORÈME 2.7. *Toute représentation projective de* G_F *(resp.* W_F*) possède un relèvement.*

Ce fait est bien connu pour G_F [We 2, p. 2]. Ainsi une représentation projective de type galoisien de W_F a un relèvement de type galoisien.

Pour le cas de W_F (c'est le théorème 1.4 de l'introduction), l'on utilise le théorème 2.2. On a donc une représentation non-ramifiée ρ de W_F, les éléments de $\rho(W_F)$ commutant à ceux de H, et telle que $r.(\pi\circ\rho)$ soit de type galoisien. Il existe un relèvement R de $r.(\pi\circ\rho)$. Mais alors ρ commute à R, puisque les éléments de $\rho(W_F)$ commutent entre eux et à ceux de H. La représentation $R.\rho^{-1}$ est un relèvement de r. C.Q.F.D

3. EXPOSANTS ET CONDUCTEURS

3.1 Si R est une représentation linéaire de W_F, on peut définir, à l'aide de la distribution de Herbrand [We 1, App. I] l'exposant de son conducteur d'Artin, appelé plus brièvement *exposant de* R, et noté $a(R)$. Si R se factorise à travers le groupe fini $G = \mathrm{Gal}(K/F)$, c'est aussi l'exposant, défini dans [Se, p. 107], de la représentation de G que R détermine. Cet exposant ne dépend que de la restriction de R à I_F. Pour une représentation non-ramifiée ρ, on a $a(\rho) = 0$, et si ρ commute à R, on a $a(R) = a(R.\rho)$.

3.2 L'on peut définir, comme dans [Se, p. 83, Rem. 1], les sous-groupes W_F^u de W_F pour $u \in \mathbf{R}$, $u \geqslant -1$: ce sont les sous-groupes de ramification de W_F en numérotation supérieure. Si $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ est un quotient fini W_F/W_K de W_F, on a $G^u = W_K W_F^u/W_K$. On a $W_F^{-1} = W_F$, le groupe W_F^o est le groupe d'inertie I_F et le groupe d'inertie sauvage P_F est la fermeture de l'union des W_F^ε pour $\varepsilon > 0$.

Si K est une extension galoisienne finie de F et G son groupe de Galois sur F, nous poserons

$$\alpha(K/F) = \sup\{u \mid G^u \neq 1\} \quad \text{et} \quad \beta(K/F) = \sup\{v \mid G_v \neq 1\}.$$

On a

$$\beta(K/F) = \psi_{K/F}(\alpha(K/F)) \quad \text{et} \quad \alpha(K/F) = \varphi_{K/F}(\beta(K/F))$$

où $\varphi_{K/F}$ et $\psi_{K/F}$ sont les fonctions de Herbrand [Se, p. 80].