

2. Relèvements

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. RELÈVEMENTS

2.1 Le groupe de Weil W_F est défini comme le sous-groupe du groupe de Galois $G_F = \text{Gal}(\bar{F}/F)$ formé des éléments qui agissent sur le corps résiduel k de \bar{F} comme une puissance entière de la transformation de Frobenius. Le groupe d'inertie I_F , formé des éléments qui agissent trivialement sur k , est un sous-groupe ouvert de W_F . Il a la topologie induite par celle de G_F . L'inclusion φ de W_F dans G_F est ainsi continue et son image est dense. Toute représentation de G_F définit donc, par composition avec φ , une représentation de W_F que nous dirons de *type galoisien*. Il est facile de voir qu'une représentation de W_F est de type galoisien si et seulement si son image est finie.

2.2 Rappelons que π désigne la projection de $GL(n, \mathbf{C})$ sur $PGL(n, \mathbf{C})$. Nous appellerons *non-ramifiée* une représentation de W_F qui est triviale sur I_F . Fixons un élément Fr de W_F induisant la transformation de Frobenius sur k . Son image dans $W_F/I_F \simeq \mathbf{Z}$ est alors génératrice. Une représentation non-ramifiée de W_F est déterminée par la donnée de l'image de Fr .

Soient ρ et ρ' deux représentations de W_F à valeurs dans $GL(n, \mathbf{C})$ ou $PGL(n, \mathbf{C})$. Si les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de $\rho'(W_F)$ (on dit, par abus de langage, que ρ et ρ' commutent), l'on définit le *produit* $\rho \cdot \rho'$ par $\rho \cdot \rho'(g) = \rho(g) \rho'(g) = \rho'(g) \rho(g)$ pour $g \in W_F$.

THÉORÈME 2.2. *Soit r une représentation projective de degré n de W_F . Posons $H = \pi^{-1}(r(W_F))$. Alors il existe une représentation non ramifiée $\rho : W_F \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$, telle que les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de H et que la représentation $r \cdot (\pi \circ \rho)$ soit de type galoisien.*

2.3 COROLLAIRE 1. *Toute représentation projective irréductible de W_F est de type galoisien.*

COROLLAIRE 2. *Soit R une représentation linéaire de degré n de W_F . Alors il existe une représentation non-ramifiée $\sigma : W_F \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$ commutant à R , et telle que $R \cdot \sigma$ soit de type galoisien.*

COROLLAIRE 3. *Toute représentation linéaire irréductible R de W_F s'écrit sous la forme $R = S \otimes \chi$ où S est de type galoisien et χ un caractère non-ramifié.*

2.4 *Démontrons le corollaire 1: soient r la représentation projective considérée et ρ la représentation non-ramifiée donnée par le théorème 2.2.*

Comme r est irréductible H est un sous-groupe irréductible de $GL(n, \mathbf{C})$. Mais les éléments de $\rho(W_F)$ commutent à ceux de H . Par suite $\rho(W_F)$ est formé de matrices scalaires et $\pi \circ \rho$ est triviale. Donc r est bien de type galoisien.

Démontrons les corollaires 2 et 3. Soit $R : W_F \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$ une représentation linéaire. Appliquons le théorème 2.2 à $r = \pi \circ R$. On obtient une représentation non-ramifiée ρ , commutant à R , et telle que $r \cdot (\pi \circ \rho)$ soit de type galoisien. Alors, il existe un entier m tel que $r \cdot (\pi \circ \rho)(Fr^m)$ soit trivial dans $PGL(n, \mathbf{C})$; la matrice $R \cdot \rho(Fr^m)$ est scalaire. Or il existe un caractère non ramifié χ de W_F tel que $R \cdot \rho(Fr^m) = \chi(Fr^m) \cdot 1_n$, où 1_n désigne la matrice unité d'ordre n . Ecrivant $S = R \cdot (\rho \otimes \chi^{-1})$, on a $S(Fr^m) = 1_n$, et S est de type galoisien, $\sigma = \rho \otimes \chi^{-1}$ étant une représentation non-ramifiée commutant à R . On a donc démontré le corollaire 2. Si R est irréductible, $\sigma(W_F)$ est formé de matrices scalaires, donc σ définit un caractère non-ramifié χ . On a alors $R = S \otimes \chi$, avec χ non ramifié, d'où le corollaire 3.

2.5 La démonstration du théorème 2.2 utilise un raffinement du raisonnement de [De, p. 542].

Soit r une représentation projective de degré n de W_F . Comme r est continue, elle est triviale sur un sous-groupe ouvert de I_F . Posons $J = \text{Ker}(r | I_F) = \text{Ker}(r) \cap I_F$: ainsi J est invariant dans W_F . L'on fait agir W_F par conjugaison sur I_F/J . Comme I_F/J est fini, une puissance de Fr , disons Fr^m , agit trivialement. Soit $x \in W_F$. On voit que $r(Fr^m)$ commute à $r(x)$. Soient φ et γ des éléments de $GL(n, \mathbf{C})$ tels que $\pi(\varphi) = r(Fr)$ et $\pi(\gamma) = r(x)$. On a ainsi $\varphi^m \gamma = s \gamma \varphi^m$, où s est un nombre complexe non-nul. Prenant le déterminant des deux membres, on obtient $s^n = 1$ et par suite φ^{mn} commute à γ . On en conclut que φ^{mn} commute à tous les éléments de $H = \pi^{-1}(r(W_F))$.

2.6 Nous laissons au lecteur le soin de montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{C}[T]$ tel que:

$$Q(T)^{mn} \equiv T \text{ modulo } P(T),$$

où P désigne le polynôme minimal de φ^{mn} .

Posons $\varphi_o = Q(\varphi^{mn})$. On obtient ainsi une matrice φ_o , commutant à tous les éléments de H et telle que $\varphi_o^{mn} = \varphi^{mn}$. Définissons la représentation non-ramifiée ρ par:

$$\sigma(Fr) = \varphi_o^{-1}.$$

Evidemment $\rho(W_F)$ commute à H et l'on a $r \cdot (\pi \circ \rho)(Fr^{mn}) = \pi(\varphi)^{mn} \pi(\varphi_0)^{-mn} = 1_n$, donc $r \cdot (\pi \circ \rho)$ est de type galoisien. C.Q.F.D.

2.7 THÉORÈME 2.7. *Toute représentation projective de G_F (resp. W_F) possède un relèvement.*

Ce fait est bien connu pour G_F [We 2, p. 2]. Ainsi une représentation projective de type galoisien de W_F a un relèvement de type galoisien.

Pour le cas de W_F (c'est le théorème 1.4 de l'introduction), l'on utilise le théorème 2.2. On a donc une représentation non-ramifiée ρ de W_F , les éléments de $\rho(W_F)$ commutant à ceux de H , et telle que $r \cdot (\pi \circ \rho)$ soit de type galoisien. Il existe un relèvement R de $r \cdot (\pi \circ \rho)$. Mais alors ρ commute à R , puisque les éléments de $\rho(W_F)$ commutent entre eux et à ceux de H . La représentation $R \cdot \rho^{-1}$ est un relèvement de r . C.Q.F.D

3. EXPOSANTS ET CONDUCTEURS

3.1 Si R est une représentation linéaire de W_F , on peut définir, à l'aide de la distribution de Herbrand [We 1, App. I] l'exposant de son conducteur d'Artin, appelé plus brièvement *exposant de R* , et noté $a(R)$. Si R se factorise à travers le groupe fini $G = \text{Gal}(K/F)$, c'est aussi l'exposant, défini dans [Se, p. 107], de la représentation de G que R détermine. Cet exposant ne dépend que de la restriction de R à I_F . Pour une représentation non-ramifiée ρ , on a $a(\rho) = 0$, et si ρ commute à R , on a $a(R) = a(R \cdot \rho)$.

3.2 L'on peut définir, comme dans [Se, p. 83, Rem. 1], les sous-groupes W_F^u de W_F pour $u \in \mathbf{R}$, $u \geq -1$: ce sont les sous-groupes de ramification de W_F en numérotation supérieure. Si $G = \text{Gal}(K/F)$ est un quotient fini W_F/W_K de W_F , on a $G^u = W_K W_F^u/W_K$. On a $W_F^{-1} = W_F$, le groupe W_F^0 est le groupe d'inertie I_F et le groupe d'inertie sauvage P_F est la fermeture de l'union des W_F^ε pour $\varepsilon > 0$.

Si K est une extension galoisienne finie de F et G son groupe de Galois sur F , nous poserons

$$\alpha(K/F) = \sup \{ u \mid G^u \neq 1 \} \quad \text{et} \quad \beta(K/F) = \sup \{ v \mid G_v \neq 1 \}.$$

On a

$$\beta(K/F) = \psi_{K/F}(\alpha(K/F)) \quad \text{et} \quad \alpha(K/F) = \varphi_{K/F}(\beta(K/F))$$

où $\varphi_{K/F}$ et $\psi_{K/F}$ sont les fonctions de Herbrand [Se, p. 80].