

# § 1. Deux problèmes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# NOMBRES ALGÈBRIQUES ET THÉORIE DES AUTOMATES

par Michel MENDES FRANCE

*Résumé* : La théorie des automates permet d'aborder le problème de la représentation décimale des nombres algébriques réels.

## § 1. DEUX PROBLÈMES

Ce compte rendu est un résumé d'un article à paraître au Bulletin de la Société Mathématique de France, écrit conjointement avec G. Christol, T. Kamae et G. Rauzy. L'objet de ce travail est de fournir une première approche à la solution des deux problèmes suivants :

**PROBLÈME 1.** Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux entiers  $\geq 2$  tels que  $\log g_1 / \log g_2 \notin \mathbf{Q}$ . Soit  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  une suite infinie d'entiers tels que  $0 \leq \varepsilon_n < \min \{g_1, g_2\}$ . Montrer que les nombres

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g_1^n} \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g_2^n}$$

sont ou bien tous deux rationnels, ou bien l'un au moins est transcendant.

**PROBLÈME 2.** Soit  $\zeta$  un nombre algébrique irrationnel réel. Soit

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g^n} \quad 0 \leq \varepsilon_n < g$$

son développement en base  $g$ . La suite  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  est-elle au « hasard » ?

La notion de hasard est, bien entendu, à préciser. Il y a essentiellement deux interprétations possibles à la question. En premier lieu, « suite au hasard » pourrait signifier « suite normale » : la fréquence d'apparition de tout mot construit sur l'alphabet  $\{0, 1, \dots, g-1\}$  est égale à  $g^{-l}$  où  $l$  est la longueur du mot considéré (notion de nombre normal). En second

lieu, « suite au hasard » pourrait signifier une suite qui ne peut pas être engendrée par une méthode « mécaniste » du type machine de Turing. Cet aspect est lié aux travaux de Kolmogoroff [8] et de Martin Lőf [10] (on pourra se reporter à Schnorr [16] ou Dellacherie [6]).

Nous montrons ici que la réponse au problème 1 est positive à condition de considérer les opérations sur  $\mathbf{R}$  sans retenues respectivement par rapport aux bases  $g_1$  et  $g_2$ . En relation avec le problème 2, nous montrons en quoi la conjecture suivante est hautement probable et sans doute accessible (nous espérons en donner une preuve bientôt).

CONJECTURE. Si

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g^n}$$

est un nombre réel algébrique irrationnel, alors la suite  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  ne peut pas être engendrée par un  $g$ -automate.

Nous définissons le  $g$ -automate plus loin.

## § 2. LA SUITE DE MORSE

Les différents concepts dont nous aurons besoin seront introduits via la suite de Morse dont nous donnons plusieurs définitions.

*Définition 1.* A l'entier  $n \geq 0$ , on associe son développement binaire

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) 2^k = \dots e_2(n) e_1(n) e_0(n)$$

où  $e_k(n) \in \{0, 1\}$  et  $e_k(n) = 0$  pour tout  $k > \left\lceil \frac{\log n}{\log 2} \right\rceil$ . Le nombre d'apparitions du chiffre 1 dans le mot  $\dots e_2(n) e_1(n) e_0(n)$  est

$$m_n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)$$

La suite de Morse  $M$  est la suite infinie  $(m_n) \pmod{2}$  ( $n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ). Elle débute donc ainsi

$$M = 0 \ 110 \ 1 \ 00 \ 11 \ 00 \ 10 \ 11 \ 0 \ 1 \ \dots \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}.$$