§ 1. Deux problèmes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

NOMBRES ALGÉBRIQUES ET THÉORIE DES AUTOMATES

par Michel MENDES FRANCE

Résumé : La théorie des automates permet d'aborder le problème de la représentation décimale des nombres algébriques réels.

§ 1. DEUX PROBLÈMES

Ce compte rendu est un résumé d'un article à paraître au Bulletin de la Société Mathématique de France, écrit conjointement avec G. Christol, T. Kamae et G. Rauzy. L'objet de ce travail est de fournir une première approche à la solution des deux problèmes suivants:

PROBLÈME 1. *Soient* g_1 *et* g_2 *deux entiers* $\geqslant 2$ *tels que* $\log g_1 / \log g_2 \notin \mathbf{Q}$. *Soit* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ *une suite infinie d'entiers tels que* $0 \leqslant \varepsilon_n < \min \{g_1, g_2\}$. *Montrer que les nombres*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g_1^n} \qquad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g_2^n}$$

sont ou bien tous deux rationnels, ou bien l'un au moins est transcendant.

PROBLÈME 2. *Soit* ζ *un nombre algébrique irrationnel réel. Soit*

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g^n} \qquad 0 \leqslant \varepsilon_n < g$$

son développement en base g. *La suite* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ *est-elle au « hasard » ?*

La notion de hasard est, bien entendu, à préciser. Il y a essentiellement deux interprétations possibles à la question. En premier lieu, « suite au hasard » pourrait signifier « suite normale »: la fréquence d'apparition de tout mot construit sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, g-1\}$ est égale à g^{-l} où l est la longueur du mot considéré (notion de nombre normal). En second lieu, « suite au hasard » pourrait signifier une suite qui ne peut pas être engendrée par une méthode « mécaniste » du type machine de Turing. Cet aspect est lié aux travaux de Kolmogoroff [8] et de Martin Löf [10] (on pourra se reporter à Schnorr [16] ou Dellacherie [6]).

Nous montrons ici que la réponse au problème 1 est positive *à condition* de considérer les opérations sur **R** *sans retenues* respectivement par rapport aux bases g_1 et g_2. En relation avec le problème 2, nous montrons en quoi la conjecture suivante est hautement probable et sans doute accessible (nous espérons en donner une preuve bientôt).

CONJECTURE. *Si*

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g^n}$$

est un nombre réel algébrique irrationnel, alors la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ *ne peut pas être engendrée par un* g*-automate.*

Nous définissons le g-automate plus loin.

§ 2. LA SUITE DE MORSE

Les différents concepts dont nous aurons besoin seront introduits via la suite de Morse dont nous donnons plusieurs définitions.

Définition 1. A l'entier $n \geqslant 0$, on associe son développement binaire

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\, 2^k = \ldots e_2(n)\, e_1(n)\, e_0(n)$$

où $e_k(n) \in \{0, 1\}$ et $e_k(n) = 0$ pour tout $k > \left[\dfrac{\log n}{\log z}\right]$. Le nombre d'apparitions du chiffre 1 dans le mot $\ldots e_2(n)\, e_1(n)\, e_0(n)$ est

$$m_n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)$$

La suite de Morse M est la suite infinie (m_n) (mod 2) ($n \in \mathrm{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$). Elle débute donc ainsi

$$M = 0\ 110\ 1\ 00\ 11\ 00\ 10\ 11\ 0\ 1\ \ldots \in \{0, 1\}^{\mathrm{N}}.$$