

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRES ALGÈBRIQUES ET THÉORIE DES AUTOMATES
Autor: France, Michel Mendes
Kapitel: § 1. Deux problèmes
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51067>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 24.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

NOMBRES ALGÈBRIQUES ET THÉORIE DES AUTOMATES

par Michel MENDES FRANCE

Résumé : La théorie des automates permet d'aborder le problème de la représentation décimale des nombres algébriques réels.

§ 1. DEUX PROBLÈMES

Ce compte rendu est un résumé d'un article à paraître au Bulletin de la Société Mathématique de France, écrit conjointement avec G. Christol, T. Kamae et G. Rauzy. L'objet de ce travail est de fournir une première approche à la solution des deux problèmes suivants :

PROBLÈME 1. Soient g_1 et g_2 deux entiers ≥ 2 tels que $\log g_1 / \log g_2 \notin \mathbf{Q}$. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ une suite infinie d'entiers tels que $0 \leq \varepsilon_n < \min \{g_1, g_2\}$. Montrer que les nombres

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g_1^n} \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g_2^n}$$

sont ou bien tous deux rationnels, ou bien l'un au moins est transcendant.

PROBLÈME 2. Soit ζ un nombre algébrique irrationnel réel. Soit

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g^n} \quad 0 \leq \varepsilon_n < g$$

son développement en base g . La suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ est-elle au « hasard » ?

La notion de hasard est, bien entendu, à préciser. Il y a essentiellement deux interprétations possibles à la question. En premier lieu, « suite au hasard » pourrait signifier « suite normale » : la fréquence d'apparition de tout mot construit sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, g-1\}$ est égale à g^{-l} où l est la longueur du mot considéré (notion de nombre normal). En second

lieu, « suite au hasard » pourrait signifier une suite qui ne peut pas être engendrée par une méthode « mécaniste » du type machine de Turing. Cet aspect est lié aux travaux de Kolmogoroff [8] et de Martin Löff [10] (on pourra se reporter à Schnorr [16] ou Dellacherie [6]).

Nous montrons ici que la réponse au problème 1 est positive à condition de considérer les opérations sur \mathbf{R} sans retenues respectivement par rapport aux bases g_1 et g_2 . En relation avec le problème 2, nous montrons en quoi la conjecture suivante est hautement probable et sans doute accessible (nous espérons en donner une preuve bientôt).

CONJECTURE. Si

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{g^n}$$

est un nombre réel algébrique irrationnel, alors la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ ne peut pas être engendrée par un g -automate.

Nous définissons le g -automate plus loin.

§ 2. LA SUITE DE MORSE

Les différents concepts dont nous aurons besoin seront introduits via la suite de Morse dont nous donnons plusieurs définitions.

Définition 1. A l'entier $n \geq 0$, on associe son développement binaire

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) 2^k = \dots e_2(n) e_1(n) e_0(n)$$

où $e_k(n) \in \{0, 1\}$ et $e_k(n) = 0$ pour tout $k > \left\lceil \frac{\log n}{\log 2} \right\rceil$. Le nombre d'apparitions du chiffre 1 dans le mot $\dots e_2(n) e_1(n) e_0(n)$ est

$$m_n = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)$$

La suite de Morse M est la suite infinie $(m_n) \pmod{2}$ ($n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$). Elle débute donc ainsi

$$M = 0 \ 110 \ 1 \ 00 \ 11 \ 00 \ 10 \ 11 \ 0 \ 1 \ \dots \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}.$$