Polynômes non réciproques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Cette question a été posée par Lehmer en liaison avec la recherche de grands nombres premiers (cf. [S]). Elle apparaît aussi en théorie ergodique (voir également [S]). Enfin elle est apparentée à la conjecture de Pisot: si $\theta > 1$ est un nombre réel tel qu'il existe $\lambda > 0$ pour lequel $\| \lambda \theta^n \| \to 0$ (où $\| . \|$ désigne la distance à l'entier le plus proche), alors θ est un nombre de Pisot. Le lien avec le problème de Lehmer se fait par l'intermédiaire de l'ensemble E des limites lim a_{n+1}/a_n, pour $(a_0, a_1, ...)$ suite de Pisot:

$$a_{n+1} = N(a_n^2/a_{n-1}), \quad n \geqslant 1,$$

où $N(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, et a_0, a_1 sont des entiers, $0 < a_0 < a_1$. On sait que E est dense dans $[1, \infty]$, et que E contient l'ensemble S des nombres de Pisot et celui T des nombres de Salem. Si on avait $E = S \cup T$, on en déduirait d'une part inf $T = 1$, ce qui répond à la question de Lehmer, et on en déduirait d'autre part la conjecture de Pisot. Cependant D. Boyd [B2], [B3] a obtenu des résultats qui suggèrent plutôt $E \neq S \cup T$.

Il est intéressant de noter qu'en 1936, après avoir donné à Paris un exposé sur la solution par Schneider du 7e problème de Hilbert sur la transcendance de a^b, C. L. Siegel signala à C. Pisot la question de D. H. Lehmer. Quarante ans après (comme nous allons le voir), la méthode de Schneider permet à Stewart et Dobrowolski de faire des progrès importants vers une réponse négative à la question de Lehmer.

Polynômes non réciproques

En 1970, C. J. Smyth a montré que si le polynôme minimal de α n'est pas réciproque (et $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$), alors $M(\alpha) \geqslant \theta_0$ où θ_0 est la racine réelle de $X^3 - X - 1$. Il en déduit le résultat de Siegel (1944): $\theta_0 = 1,32471795 \ldots$ est le plus petit nombre de Pisot (l'existence du plus petit nombre de Pisot résulte du fait, démontré par Salem en 1944, que l'ensemble S est fermé). Il en déduit aussi un résultat de Chamfy (1957): si α est un entier algébrique non réel vérifiant $|\alpha| = |\bar{\alpha}| > 1$ et $|\alpha_j| < 1$ pour α_j conjugué de α avec $\alpha_j \neq \alpha$ et $\alpha_j \neq \bar{\alpha}$, alors $|\alpha| \geqslant \sqrt{\theta_0}$. Enfin si $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ a un polynôme minimal non réciproque, on a

$$\max |\alpha_j| \geqslant 1 + \frac{\log \theta_0}{d}.$$

La question de Lehmer est donc résolue pour les polynômes non réciproques. Néanmoins l'étude de l'ensemble des valeurs de $M(\alpha)$ pour α non réciproque n'est pas terminée. Le plus petit point limite connu [B1, B2, B4] correspond aux polynômes $X^n + X + 1$:

$$\begin{aligned}\beta &= \exp \int_0^1 \int_0^1 \log \left| e^{2i\pi t_1} + e^{2i\pi t_2} + 1 \right| dt_1\, dt_2 \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/3} - \log \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) dt \right\} \\ &= 1{,}38135 \ldots\end{aligned}$$

On ignore si ce nombre est algébrique ou transcendant (cf. [B2]).

Remarque. Pour $P \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_n]$, Mahler définit

$$M(P) = \exp \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log \left| P(e^{2i\pi t_1}, \ldots, e^{2i\pi t_n}) \right| dt_1 \ldots dt_n .$$

La formule de Jensen montre que $M(\alpha) = M(P)$ si $P \in \mathbf{Z}[X]$ est le polynôme minimal de α. D'autre part soit $P(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$, et, pour $k \geqslant 0$, soit $Q_k(X) = P(X, X^k) \in \mathbf{C}[X]$. Alors on a (cf. [B1] théorème 2) $M(Q_k) \to M(P)$ quand $k \to \infty$.

Polynômes réciproques

D. W. Boyd a fait très récemment une recherche sur ordinateur qui lui a permis de vérifier que $M(\alpha) \geqslant \alpha_0$ si α est un nombre algébrique (non nul et non racine de l'unité) de degré $\leqslant 16$, ou bien de degré $\leqslant 26$ et de hauteur $\leqslant 1$ (i.e. dont le polynôme minimal a pour coefficients 0, 1 ou -1). D'autre part le plus petit point limite de l'ensemble des $M(\alpha)$ qu'il connaisse est

$$\begin{aligned}&M\big(Y^2(X+1) + Y(X^2+X+1) + X^2 + 1\big) \\ &= \exp \int_0^1 \int_0^1 \log \left| \zeta^2(1+z^{-1}) + \zeta(z+1+z^{-1}) + z + 1 \right| d\theta\, dt \\ &= 1{,}255425 \ldots\end{aligned}$$

(où on a écrit $\zeta = e^{2i\pi\theta}$, $z = e^{2i\pi t}$), correspondant par exemple aux polynômes

$$X^{2n}(1+X^{-1}) + X^n(X+1+X^{-1}) + X + 1 .$$