Analogue elliptique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Au lieu d'utiliser le polynôme minimal de f on peut utiliser n'importe quel polynôme $F \in \mathbf{Z}[X]$, pourvu que $F(\alpha^p) \neq 0$. On aura une bonne minoration de la norme de $F(\alpha^p)$ si f (ou mieux, une puissance de f) divise F.

LEMME 2. *Soient* α *un entier algébrique non nul et non racine de l'unité,* f *son polynôme minimal,* H *sa hauteur,* T *un entier,* p *un nombre premier, et* $F \in \mathbf{Z}[X]$ *un polynôme de degré* $< L$ *tel que* f^T *divise* F *et* $F(\alpha^p) \neq 0$. *Alors*

$$M(\alpha)^{Lp}\,(LH)^d \geqslant p^{dT}\,.$$

En effet, on a

$$|N(F(\alpha^p)) \leqslant (L\,H)^d\,M(\alpha)^{Lp}$$

et p^{dT} divise la norme de $F(\alpha^p)$.

Il reste à trouver un polynôme F vérifiant les hypothèses du lemme 2. On peut bien sûr choisir $F = f^T$, mais on ne trouve alors rien de mieux que le lemme 1. Le miracle vient de la méthode de Thue: en utilisant le lemme de Siegel, on peut construire un polynôme F tel que f^T divise F, et tel que la hauteur de F ne soit pas trop grande:

$$H(F) \leqslant 2 + \left(2^T\,L^{T^2 d} M(\alpha)^{TL}\right)^{1/(L-dT)}\,,$$

pourvu que $L \geqslant 2\,dT$. Ainsi le degré de F risque d'être plus grand que celui de f^T, mais on gagne une bonne majoration de la hauteur de F. On choisit $T = \left[50(\log d)(\log\log d)^{-1}\right]$, et $L = dT^2$. On montre qu'il existe un nombre premier p dans l'intervalle $[T^2, 6\,T^2 \log T]$ tel que $F(\alpha^p) \neq 0$. On en déduit $\log M(\alpha) \geqslant (8\,T^3)^{-1}$ pour $d \geqslant 16$, ce qui démontre le théorème.

Dans un travail récent [D], E. Dobrowolski a obtenu des minorations de $M(P)$ pour $P \in \mathbf{Z}[X]$, $P(0) \neq 0$ et P non produit de polynômes cyclotomiques, en fonction seulement du nombre de coefficients non nuls de P.

ANALOGUE ELLIPTIQUE

Soit E une courbe elliptique définie sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques. Soit $\hat{h}$ la hauteur de Néron Tate sur $E(\overline{\mathbf{Q}})$. M. Anderson a démontré dans le cas C.M. que pour tout $P \in E(\overline{\mathbf{Q}})$ non de torsion,

$$\hat{h}(P) > c_1\;D^{-4}(\log D)^{-3}\,,$$

où c_1 est une constante positive ne dépendant que de g_2, g_3. Cet énoncé a été récemment amélioré par D. W. Masser (résultat annoncé en Mai 1979 aux journées sur les fonctions abéliennes et les nombres transcendants):

THÉORÈME (D. W. Masser). *Soit* E *une courbe elliptique définie sur* $\overline{\mathbf{Q}}$ *Il existe* $c_2 > 0$ *tel que si* $P \in E(\overline{\mathbf{Q}})$ *n'est pas de torsion, alors*

$$\hat{h}(P) > c_2 \; D^{-10} (\log D)^{-6} .$$

De plus si E *a une multiplication complexe*

$$\hat{h}(P) > c_2 \; D^{-3} (\log D)^{-2} .$$

REMARQUE FINALE

Soit α un *nombre* algébrique de polynôme minimal

$$a_0 X^d + \ldots = a_d = a_0 \prod_{j=1}^{d} (X - \alpha_j) .$$

On définit

$$M(\alpha) = |a_0| \prod_{j=1}^{d} \max(1, |\alpha_j|) .$$

Le résultat suivant, implicite chez Feldman, a été explicité par D. Bertrand:

$$M(\alpha) = \prod_{v} \max(1, |\alpha|_v)$$

où v décrit l'ensemble des valeurs absolues convenablement normalisées de $\mathbf{Q}(\alpha)$. La hauteur logarithmique absolue de α introduite par A. Weil peut alors être définie par

$$h(\alpha) = \frac{1}{[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]} \log M(\alpha) .$$

Dans les démonstrations de transcendance on a le choix entre plusieurs définitions de la « taille ». Il est maintenant généralement admis (depuis peu) que le meilleur choix est $h(\alpha)$.