Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES
Autor: Savoyant, Michel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51069

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES

par Michel SAVOYANT

NOTATIONS

- $\mathbf{C}$ désigne le plan complexe; si $F \subset \mathbf{C}$, ∂F est la frontière de F, $\bar{F}$ l'adhérence de F.
- $\Delta(z_0, r)$ est le disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$. On notera $\Delta = \Delta(0, 1)$.
- Si f est une fonction complexe bornée définie sur F on note $\|f\|_F = \sup_{z \in F} |f(z)|$.

Soit G un ouvert borné de $\mathbf{C}$.

- $H^\infty(G)$ est l'algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur G avec la norme $\|f\|_G$.
- $A(G)$ est l'algèbre uniforme des fonctions continues sur $\bar{G}$ et analytique dans G.

1. INTRODUCTION

Soit G un ouvert borné de $\mathbf{C}$ et B un sous-ensemble de $H^\infty(G)$: on note $B(G)$ l'ensemble des fonctions de $H^\infty(G)$ qui sont limites ponctuelles sur G d'une suite bornée d'éléments de B; nous nous intéressons au problème suivant: quand $B(G)$ est-il fermé dans $H^\infty(G)$? Lorsque $B = A(G)$ ou (avec une hypothèse supplémentaire sur ∂G) lorsque B est l'ensemble des fractions rationnelles avec pôles hors de $\bar{G}$, A. M. Davie ([3]) a montré que $B(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$; nous étudions ici le cas où $B = P$, l'algèbre des polynômes. Rubel et Shields ([7] th 4.1) ont montré qu'en général $P(G)$ n'est pas fermé dans $H^\infty(G)$; dans ce travail nous donnons une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que $P(G)$ le soit lorsque G est connexe. Avant d'énoncer le résultat principal nous donnons deux définitions.

1.1. *Définition.* Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{C}$. L'enveloppe de Carathéodory de Ω est l'intérieur du complémentaire de la composante connexe non bornée du complémentaire de $\overline{\Omega}$. On note Ω^* cet ouvert.

1.2. *Définition.* Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et S un sous-ensemble ouvert de Ω; un point $\zeta \in \partial\Omega$ est dit accessible (resp. accessible à partir de S) s'il existe un chemin continu $z = \gamma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ tel que: $\gamma(t) \in \Omega$ (resp. $\in S$) pour $t \in [0, 1[$ et $\gamma(1) = \zeta$.

Nous démontrons le théorème suivant:

1.3. THÉORÈME. *Soient G un ouvert* connexe *borné de* $\mathbf{C}$, *G^* son enveloppe de Carathéodory, U la composante connexe de G^* contenant G, et $G' = U \setminus \overline{G}$ Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$ si et seulement si l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G' est au plus dénombrable.*

Nous aurons à utiliser le théorème suivant qui caractérise les éléments de $P(G)$: (cf. [5], p. 151 ou [7] pour une démonstration).

1.4. THÉORÈME. *Une fonction $f \in H^\infty(G)$ est dans $P(G)$ si et seulement s'il existe une fonction $F \in H^\infty(G^*)$ tel que $F \equiv f$ sur G.*

Nous donnerons aussi des conditions suffisantes, portant seulement sur G^*, pour que $P(G)$ soit fermé dans $H^\infty(G)$.

2. ENSEMBLES DOMINANTS

2.1. *Définition.* Soit G un ouvert de $\mathbf{C}$, et S un sous-ensemble de G. On dit que S est dominant dans G si $\|f\|_S = \|f\|_G$ pour toute f dans $H^\infty(G)$.

La proposition suivante justifie l'introduction de cette définition.

2.2. PROPOSITION. *Soient G un ouvert* connexe *borné de* $\mathbf{C}$, *et U la composante connexe de G^* qui contient G. Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$ si et seulement si G est dominant dans U.*

Preuve. Si G est dominant dans U, l'application restriction de $H^\infty(U)$ dans $H^\infty(G)$ est une isométrie, et donc l'ensemble $\{f_{|G} : f \in H^\infty(U)\}$ est fermé dans $H^\infty(G)$; cet ensemble coïncide avec $P(G)$ d'après le théorème 1.4.

Réciproquement supposons $P(G)$ fermé dans $H^\infty(G)$; l'application restriction précédente est un homomorphisme continu bijectif de l'algèbre

$H^\infty(U)$ sur l'algèbre $P(G)$ (la surjectivité résultant de 1.4); d'après le théorème du graphe fermé, l'application réciproque est continue; il existe donc une constante $c > 0$ telle que pour chaque $f \in H^\infty(U)$ avec $\|f\|_U = 1$ et pour chaque entier $n \geqslant 1$ on a

$$c \leqslant \| f^n \|_G = \|f\|_G^n \leqslant 1$$

Donc $\|f\|_G = 1$ et l'application restriction est une isométrie, c'est-à-dire que G est dominant dans U.

Soit Δ le disque unité ouvert. Un théorème de Brown, Shields et Zeller ([1]) caractérise les sous-ensembles dominants de Δ : $S \subset \Delta$ est dominant si et seulement si presque tout point de $\partial\Delta$ (pour la mesure de Lebesgue sur $\partial\Delta$) est limite non-tangentielle d'une suite de S. La proposition suivante montre que si S est connexe, on a une caractérisation purement topologique des ensembles dominants dans Δ.

2.3. Proposition. *Soit S un sous-ensemble* connexe *de Δ. Alors S est dominant dans Δ si et seulement si $\partial S \supset \partial\Delta$.*

Preuve. Même si S n'est pas connexe, il est clair que la condition est nécessaire; en effet si $e^{i\theta} \notin \partial S$ la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1 + e^{-i\theta} z}{2}$ est telle que $\|f\|_S < \|f\|_\Delta = 1$.

Réciproquement supposons $\partial S \supset \partial\Delta$. Nous montrons d'abord que presque tout point de $\partial\Delta$ est limite non-tangentielle d'une suite de points de S; en effet supposons que non; alors il existe $E \subset \partial\Delta$ de mesure non nulle telle que pour chaque $e \in E$ il existe dans Δ un triangle T_e de sommet e, que l'on peut prendre rectangle en e, isocèle, ayant le rayon passant par e comme bissectrice, et qui ne contient aucun point de S; pour chaque entier $n \geqslant 1$ soit $E_n = \left\{ e \in E;\ \text{hauteur de } T_e \geqslant \dfrac{1}{n} \right\}$ alors $E = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n$ et il existe d'après le théorème de la convergence monotone n_0 tel que E_{n_0} a une mesure non nulle; soit e_1 et e_2 deux points de E_{n_0} avec $|e_1 - e_2| \leqslant \dfrac{1}{2n_0}$ les triangles T_{e_1} et T_{e_2} déterminent un « triangle » ayant un arc d'extrêmités e_1 et e_2 comme côté; le complémentaire dans Δ de la frontière de ce « triangle » a deux composantes connexes, et S doit être dans l'une d'elles, ce qui est impossible puisque $\partial S \supset \partial\Delta$. Montrons maintenant que S est dominant; soit $f \in H^\infty(\Delta)$ et notons $L^8(\partial\Delta)$ l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées pour la mesure de Lebesgue sur $\partial\Delta$

et $\| \ \|_\infty$ la norme correspondante; f a une limite radiale $\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$ pour presque tout $e^{i\theta} \in \partial\Delta$ et $f^* \in L^\infty(\partial\Delta)$ avec $\| f^* \|_\infty = \| f \|_\Delta$; de plus si la limite radiale de f existe en $e^{i\theta}$, on a aussi $\lim_n f(z_n) = f^*(e^{i\theta})$ pour toute suite (z_n) de Δ tendant non tangentiellement vers $e^{i\theta}$ ([4] th. 1.3); soit $\varepsilon > 0$, il existe $E \subset \partial\Delta$ de mesure non nulle telle que $|f^*(e^{i\theta})| \geqslant \|f\|_\Delta - \varepsilon$ sur E et puisque presque tout point de E est limite non tangentielle d'une suite de S on a $\|f\|_S \geqslant \|f\|_\Delta - \varepsilon$; la proposition 2.3 est démontrée.

Avant de donner une première application de 2.3 nous donnons sans démonstration une liste de propriétés satisfaites par l'enveloppe de Carathéodory Ω^* d'un ouvert Ω.

2.4. Proposition. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{C}$ et Ω^* son enveloppe de Carathéodory. Notons H la composante connexe non bornée du complémentaire de $\overline{\Omega}$.*

(i) $\partial\Omega^* = \partial\overline{H} = \partial H \subset \partial\Omega$

(ii) *H est le complémentaire de $\overline{\Omega}^*$*

(iii) *Chaque composante connexe de Ω^* est simplement connexe. (i.e. $\mathbf{C} \setminus \Omega^*$ est connexe).*

(iv) *Si de plus Ω est connexe, $\partial\Omega^* = \partial U$ où U est la composante connexe de Ω^* qui contient Ω.*

Une démonstration de (i), (ii) et (iii) se trouve dans [7], la propriété (iv) est immédiate à démontrer.

2.5. Théorème. *Soit G un ouvert connexe borné, et supposons que ∂G^* soit une courbe de Jordan. Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$.*

Preuve. Remarquons que dans les hypothèses du théorème G^* est connexe (i.e. $G^* = U$ avec les notations précédentes). D'après la proposition 2.2 il suffit de montrer que G est dominant dans G^*. Soit ψ une transformation conforme de G^* sur Δ (G^* est simplement connexe d'après 2.4 (iii)): ∂G^* étant une courbe de Jordan, ψ se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{G}^*$ sur $\overline{\Delta}$, qui applique ∂G^* sur $\partial\Delta$; $\Omega = \psi(G)$ est un ouvert connexe de Δ et $\partial\Omega \supset \partial\Delta$ puisque $\partial G \supset \partial G^*$; donc Ω est dominant dans Δ d'après 2.3; il est clair alors que G est dominant dans G^*.

3. Démonstration du théorème 1.3

Dans toute la suite G est un ouvert *connexe* borné de $\mathbf{C}$, G^* son enveloppe de Carathéodory, U la composante connexe de G^* contenant G, ψ une transformation conforme de U sur Δ. On notera φ la transformation réciproque de Δ sur U : $\varphi = \psi^{-1}$.

3.1. *Lemme.* Soient $\zeta \in \partial U$ un point accessible, γ_1 et γ_2 deux chemins dans U se terminant en ζ. Alors

$$\lim_{\gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z) = \lim_{\gamma_2 \ni z \to \zeta} \psi(z)$$

Preuve. On sait que $\lim\limits_{\gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z)$ existe ($i = 1, 2$) (cf. [6], p. 315-323). On peut supposer que γ_1 et γ_2 sont des *arcs* de Jordan qui ne se rencontrent pas (sauf au point ζ); soit l un arc de Jordan dans U joignant les points initiaux de γ_1 et γ_2, et ne rencontrant pas γ_1 et γ_2; la juxtaposition des arcs γ_1, γ_2 et l détermine (avec le point ζ) une courbe fermée de Jordan; soit Ω l'intérieur de cette courbe, alors $\Omega \subset U$: en effet si Ω n'était pas inclus dans U, il existerait des points de ∂U dans Ω, et donc des points de H (composante connexe non bornée du complémentaire de $\bar{G}$) dans Ω d'après 2.4, et puisque $\partial\Omega \cap H = \varnothing$ on devrait avoir $H \subset \Omega$ ce qui est absurde. Le théorème suivant de Lindelof permet de conclure.

Théorème. *Soit Ω un ouvert simplement connexe dans la frontière Γ est une courbe de Jordan. Soit ψ une fonction analytique dans Ω et satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) $|\psi(z)| \leqslant 1$ *dans* Ω.

(ii) ψ *est continue sur* $\Gamma \setminus \{\zeta\}$ *où* ζ *est un point de* Γ.

(iii) *Si* Γ_1 *et* Γ_2 *désignent les arcs frontières déterminés par* ζ *et un second point* ζ' *de* Γ, *les limites* $a = \lim\limits_{\Gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z)$, $b = \lim\limits_{\Gamma_2 \ni z \to \zeta} \psi(z)$ *existent.*

Alors $a = b$ *et* $\lim\limits_{\Omega \ni z \to \zeta} \psi(z) = a$.

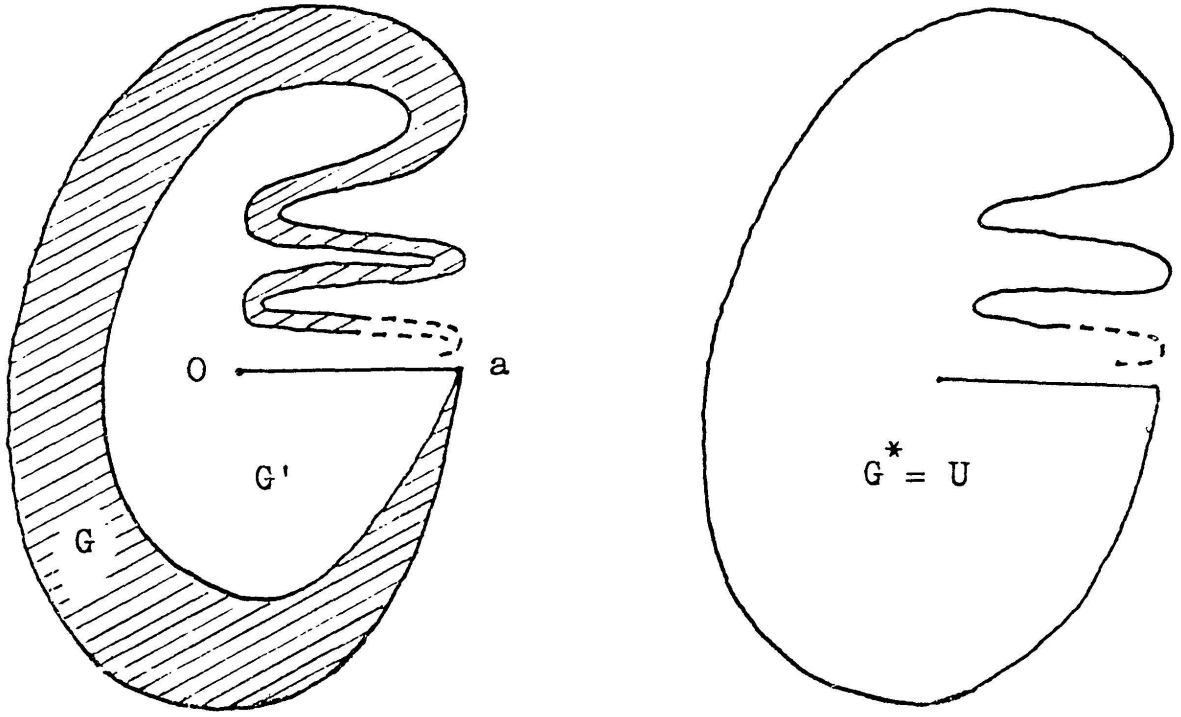
Une démonstration de ce théorème se trouve dans [6], p. 202.

Soient T l'ensemble des points de $\partial\Delta$ où φ a des limites radiales et φ^* la fonction « frontière » ainsi définie sur T; $\partial\Delta \setminus T$ est de mesure nulle et φ^* est *injective* sur T d'après le lemme 3.1.

3.2. *Démonstration du théorème* 1.3. Supposons que $P(G)$ ne soit pas fermé dans $H^\infty(G)$; alors d'après 2.2 $\psi(G) = O$ n'est pas dominant dans Δ; d'après 2.3 il existe donc $y \in \partial\Delta$ et $r > 0$ tels que $\Delta(y, r) \cap O = \varnothing$ et il est clair que $\varphi^*(T \cap \Delta(y, r))$ est un sous-ensemble non dénombrable de ∂U formé de points accessibles à partir de G'.

Réciproquement soit A l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G' et supposons que A soit un ensemble infini non dénombrable. Soient (G'_n) les composantes connexes de G' et notons A_n l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G'_n. Il est clair que $A = \bigcup_n A_n$ et il existe donc un entier n_0 pour lequel A_{n_0} est infini; soient ζ_1 et ζ_2 deux points distincts de A_{n_0} et γ un arc de Jordan dans G'_{n_0} tel que $\gamma(0) = \zeta_1$ et $\gamma(1) = \zeta_2$; l'image par ψ de γ est un arc de Jordan dans Δ joignant deux points *distincts* de $\partial\Delta$ (cf. [6], p. 322); puisque $O = \psi(G)$ est connexe, $\partial\Delta$ n'est pas inclus dans ∂O et donc O n'est pas dominant dans Δ, ainsi que G dans U : $P(G)$ n'est donc pas fermé dans $H^\infty(G)$ d'après 2.2.

Exemple. ([7], th. 4.1).



G est l'ouvert hachuré: les points du segment $[0, a]$ sont accessibles à partir de G'; $P(G)$ n'est donc pas fermé dans $H^\infty(G)$.

4. Une généralisation du théorème 2.5

Soit $\zeta \in \partial U$: on dit que ζ est un point simple si pour toute suite (z_n) dans U tendant vers ζ, il existe un chemin dans U passant par les points z_n et se terminant en ζ, sinon on dira que ζ est un point non simple. Un sous-ensemble de ∂U est de mesure nulle s'il est de mesure nulle pour la mesure harmonique sur ∂U d'un point de U.

4.1. Théorème. *Soit G un ouvert connexe borné de* $\mathbf{C}$. *Supposons que l'ensemble des points non simples de ∂U est de mesure nulle. Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$.*

C'est bien une généralisation de 2.5, puisque si tous les points de $\partial U\,(=\partial G^*)$ sont simples, ∂U est une courbe de Jordan. ([8], 14.20.*a*)).

Preuve. Si le résultat est faux, alors comme dans la démonstration du théorème 1.3, il existe $y \in \partial \Delta$ et $r > 0$ tel que $\Delta(y, r) \cap O = \varnothing$ (où $O = \psi(G)$). Soit $T_1 = \Delta(y, r) \cap T$; on sait que $E = \varphi^*(T_1)$ est de mesure non nulle (cf. par exemple [2], p. 350). Soit $e = \varphi^*(t)$ avec $t \in T_1$ et supposons que e soit un point simple; puisque $\partial G \supset \partial G^* = \partial U$ il existe une suite (z_n) dans G tendant vers e; soit γ un chemin dans U passant par les points z_n et se terminant en e; d'après le lemme 3.1. $\lim\limits_{\gamma \ni z \to e} \psi(z) = t$, ce qui est absurde.

RÉFÉRENCES

[1] Brown, L., A. Shields and K. Zeller. On absolutely convergent exponential sums. *Trans. Amer. Math. Soc. 96* (1960), pp. 162-183.

[2] Davie, A. M. Dirichlet algebras of analytic functions. *J. Functional Analysis 6* (1970), pp. 348-356.

[3] —— Bounded limits of analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc. 32*, n° 1 (1972), pp. 127-133.

[4] Duren, P. L. *Theory of H^p spaces.* Academic Press, 1970.

[5] Gamelin, T. W. *Uniform algebras.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, V.S., 1969.

[6] Nevanlinna, R. and V. Paatero. *Introduction to complex analysis.* Addison Wesley Publishing Company, 1969.

[7] Rubel, L. and A. Shields. Bounded approximation by polynomials. *Acta Math. 112* (1964), pp. 145-162.

[8] Rudin, W. *Real and complex analysis.* McGraw Hill, New York, 1966.

(Reçu le 4 septembre 1979)

Michel Savoyant

UER de Mathématiques
place Eugène-Bataillon
F-34060 Montpellier Cedex

vide-leer-empty