Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES

Autor: Savoyant, Michel

Kapitel: 2. Ensembles dominants

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51069

1.1. *Définition.* Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{C}$. L'enveloppe de Carathéodory de Ω est l'intérieur du complémentaire de la composante connexe non bornée du complémentaire de $\overline{\Omega}$. On note Ω^* cet ouvert.

1.2. *Définition.* Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et S un sous-ensemble ouvert de Ω; un point $\zeta \in \partial\Omega$ est dit accessible (resp. accessible à partir de S) s'il existe un chemin continu $z = \gamma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ tel que: $\gamma(t) \in \Omega$ (resp. $\in S$) pour $t \in [0, 1[$ et $\gamma(1) = \zeta$.

Nous démontrons le théorème suivant:

1.3. THÉORÈME. *Soient G un ouvert* connexe *borné de $\mathbf{C}$, G^* son enveloppe de Carathéodory, U la composante connexe de G^* contenant G, et $G' = U \setminus \overline{G}$ Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$ si et seulement si l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G' est au plus dénombrable.*

Nous aurons à utiliser le théorème suivant qui caractérise les éléments de $P(G)$: (cf. [5], p. 151 ou [7] pour une démonstration).

1.4. THÉORÈME. *Une fonction $f \in H^\infty(G)$ est dans $P(G)$ si et seulement s'il existe une fonction $F \in H^\infty(G^*)$ tel que $F \equiv f$ sur G.*

Nous donnerons aussi des conditions suffisantes, portant seulement sur G^*, pour que $P(G)$ soit fermé dans $H^\infty(G)$.

2. Ensembles dominants

2.1. *Définition.* Soit G un ouvert de $\mathbf{C}$, et S un sous-ensemble de G. On dit que S est dominant dans G si $\|f\|_S = \|f\|_G$ pour toute f dans $H^\infty(G)$.

La proposition suivante justifie l'introduction de cette définition.

2.2. PROPOSITION. *Soient G un ouvert* connexe *borné de $\mathbf{C}$, et U la composante connexe de G^* qui contient G. Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$ si et seulement si G est dominant dans U.*

Preuve. Si G est dominant dans U, l'application restriction de $H^\infty(U)$ dans $H^\infty(G)$ est une isométrie, et donc l'ensemble $\{f_{|G} : f \in H^\infty(U)\}$ est fermé dans $H^\infty(G)$; cet ensemble coïncide avec $P(G)$ d'après le théorème 1.4.

Réciproquement supposons $P(G)$ fermé dans $H^\infty(G)$; l'application restriction précédente est un homomorphisme continu bijectif de l'algèbre

$H^\infty(U)$ sur l'algèbre $P(G)$ (la surjectivité résultant de 1.4); d'après le théorème du graphe fermé, l'application réciproque est continue; il existe donc une constante $c > 0$ telle que pour chaque $f \in H^\infty(U)$ avec $\|f\|_U = 1$ et pour chaque entier $n \geqslant 1$ on a

$$c \leqslant \| f^n \|_G = \|f\|_G^n \leqslant 1$$

Donc $\|f\|_G = 1$ et l'application restriction est une isométrie, c'est-à-dire que G est dominant dans U.

Soit Δ le disque unité ouvert. Un théorème de Brown, Shields et Zeller ([1]) caractérise les sous-ensembles dominants de Δ : $S \subset \Delta$ est dominant si et seulement si presque tout point de $\partial\Delta$ (pour la mesure de Lebesgue sur $\partial\Delta$) est limite non-tangentielle d'une suite de S. La proposition suivante montre que si S est connexe, on a une caractérisation purement topologique des ensembles dominants dans Δ.

2.3. Proposition. *Soit S un sous-ensemble* connexe *de Δ. Alors S est dominant dans Δ si et seulement si $\partial S \supset \partial\Delta$.*

Preuve. Même si S n'est pas connexe, il est clair que la condition est nécessaire; en effet si $e^{i\theta} \notin \partial S$ la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1 + e^{-i\theta} z}{2}$ est telle que $\|f\|_S < \|f\|_\Delta = 1$.

Réciproquement supposons $\partial S \supset \partial\Delta$. Nous montrons d'abord que presque tout point de $\partial\Delta$ est limite non-tangentielle d'une suite de points de S; en effet supposons que non; alors il existe $E \subset \partial\Delta$ de mesure non nulle telle que pour chaque $e \in E$ il existe dans Δ un triangle T_e de sommet e, que l'on peut prendre rectangle en e, isocèle, ayant le rayon passant par e comme bissectrice, et qui ne contient aucun point de S; pour chaque entier $n \geqslant 1$ soit $E_n = \left\{ e \in E ; \text{ hauteur de } T_e \geqslant \dfrac{1}{n} \right\}$ alors $E = \bigcup_{n \geqq 1} E_n$ et il existe d'après le théorème de la convergence monotone n_0 tel que E_{n_0} a une mesure non nulle; soit e_1 et e_2 deux points de E_{n_0} avec $| e_1 - e_2 | \leqslant \dfrac{1}{2 n_0}$ les triangles T_{e_1} et T_{e_2} déterminent un « triangle » ayant un arc d'extrêmités e_1 et e_2 comme côté; le complémentaire dans Δ de la frontière de ce « triangle » a deux composantes connexes, et S doit être dans l'une d'elles, ce qui est impossible puisque $\partial S \supset \partial\Delta$. Montrons maintenant que S est dominant; soit $f \in H^\infty(\Delta)$ et notons $L^8(\partial\Delta)$ l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées pour la mesure de Lebesgue sur $\partial\Delta$

et $\| \ \|_\infty$ la norme correspondante; f a une limite radiale $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta})$ pour presque tout $e^{i\theta} \in \partial\Delta$ et $f^* \in L^\infty(\partial\Delta)$ avec $\| f^* \|_\infty = \| f \|_\Delta$; de plus si la limite radiale de f existe en $e^{i\theta}$, on a aussi $\lim\limits_n f(z_n) = f^*(e^{i\theta})$ pour toute suite (z_n) de Δ tendant non tangentiellement vers $e^{i\theta}$ ([4] th. 1.3); soit $\varepsilon > 0$, il existe $E \subset \partial\Delta$ de mesure non nulle telle que $| f^*(e^{i\theta}) | \geqslant \| f \|_\Delta - \varepsilon$ sur E et puisque presque tout point de E est limite non tangentielle d'une suite de S on a $\| f \|_S \geqslant \| f \|_\Delta - \varepsilon$; la proposition 2.3 est démontrée.

Avant de donner une première application de 2.3 nous donnons sans démonstration une liste de propriétés satisfaites par l'enveloppe de Carathéodory Ω^* d'un ouvert Ω.

2.4. PROPOSITION. *Soient Ω un ouvert borné de* $\mathbf{C}$ *et Ω^* son enveloppe de Carathéodory. Notons H la composante connexe non bornée du complémentaire de $\overline{\Omega}$.*

(i) $\partial\Omega^* = \partial\overline{H} = \partial H \subset \partial\Omega$

(ii) *H est le complémentaire de $\overline{\Omega}^*$*

(iii) *Chaque composante connexe de Ω^* est simplement connexe. (i.e. $\mathbf{C} \setminus \Omega^*$ est connexe).*

(iv) *Si de plus Ω est connexe, $\partial\Omega^* = \partial U$ où U est la composante connexe de Ω^* qui contient Ω.*

Une démonstration de (i), (ii) et (iii) se trouve dans [7], la propriété (iv) est immédiate à démontrer.

2.5. THÉORÈME. *Soit G un ouvert connexe borné, et supposons que ∂G^* soit une courbe de Jordan. Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$.*

Preuve. Remarquons que dans les hypothèses du théorème G^* est connexe (i.e. $G^* = U$ avec les notations précédentes). D'après la proposition 2.2 il suffit de montrer que G est dominant dans G^*. Soit ψ une transformation conforme de G^* sur Δ (G^* est simplement connexe d'après 2.4 (iii)): ∂G^* étant une courbe de Jordan, ψ se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{G}^*$ sur $\overline{\Delta}$, qui applique ∂G^* sur $\partial\Delta$; $\Omega = \psi(G)$ est un ouvert connexe de Δ et $\partial\Omega \supset \partial\Delta$ puisque $\partial G \supset \partial G^*$; donc Ω est dominant dans Δ d'après 2.3; il est clair alors que G est dominant dans G^*.