Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES
Autor: Savoyant, Michel
Kapitel: 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51069

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3. Démonstration du théorème 1.3

Dans toute la suite G est un ouvert *connexe* borné de $\mathbf{C}$, G^* son enveloppe de Carathéodory, U la composante connexe de G^* contenant G, ψ une transformation conforme de U sur Δ. On notera φ la transformation réciproque de Δ sur U : $\varphi = \psi^{-1}$.

3.1. *Lemme.* Soient $\zeta \in \partial U$ un point accessible, γ_1 et γ_2 deux chemins dans U se terminant en ζ. Alors

$$\lim_{\gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z) = \lim_{\gamma_2 \ni z \to \zeta} \psi(z)$$

Preuve. On sait que $\lim\limits_{\gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z)$ existe ($i = 1, 2$) (cf. [6], p. 315-323). On peut supposer que γ_1 et γ_2 sont des *arcs* de Jordan qui ne se rencontrent pas (sauf au point ζ); soit l un arc de Jordan dans U joignant les points initiaux de γ_1 et γ_2, et ne rencontrant pas γ_1 et γ_2; la juxtaposition des arcs γ_1, γ_2 et l détermine (avec le point ζ) une courbe fermée de Jordan; soit Ω l'intérieur de cette courbe, alors $\Omega \subset U$: en effet si Ω n'était pas inclus dans U, il existerait des points de ∂U dans Ω, et donc des points de H (composante connexe non bornée du complémentaire de $\bar{G}$) dans Ω d'après 2.4, et puisque $\partial\Omega \cap H = \varnothing$ on devrait avoir $H \subset \Omega$ ce qui est absurde. Le théorème suivant de Lindelof permet de conclure.

Théorème. *Soit Ω un ouvert simplement connexe dans la frontière Γ est une courbe de Jordan. Soit ψ une fonction analytique dans Ω et satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) $|\psi(z)| \leqslant 1$ *dans* Ω.

(ii) ψ *est continue sur* $\Gamma \setminus \{\zeta\}$ *où* ζ *est un point de* Γ.

(iii) *Si* Γ_1 *et* Γ_2 *désignent les arcs frontières déterminés par* ζ *et un second point* ζ' *de* Γ, *les limites* $a = \lim\limits_{\Gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z)$, $b = \lim\limits_{\Gamma_2 \ni z \to \zeta} \psi(z)$ *existent.*

Alors $a = b$ *et* $\lim\limits_{\Omega \ni z \to \zeta} \psi(z) = a$.

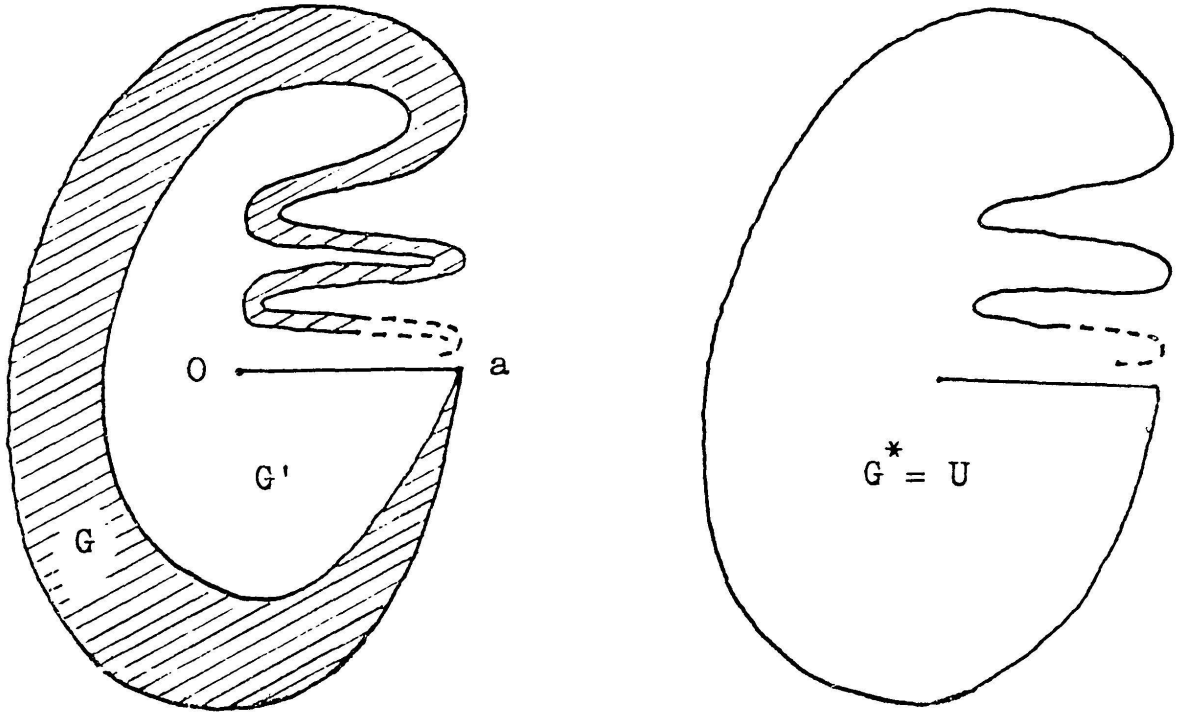
Une démonstration de ce théorème se trouve dans [6], p. 202.

Soient T l'ensemble des points de $\partial\Delta$ où φ a des limites radiales et φ^* la fonction « frontière » ainsi définie sur T; $\partial\Delta \setminus T$ est de mesure nulle et φ^* est *injective* sur T d'après le lemme 3.1.

3.2. *Démonstration du théorème* 1.3. Supposons que $P(G)$ ne soit pas fermé dans $H^\infty(G)$; alors d'après 2.2 $\psi(G) = O$ n'est pas dominant dans Δ; d'après 2.3 il existe donc $y \in \partial\Delta$ et $r > 0$ tels que $\Delta(y, r) \cap O = \varnothing$ et il est clair que $\varphi^*(T \cap \Delta(y, r))$ est un sous-ensemble non dénombrable de ∂U formé de points accessibles à partir de G'.

Réciproquement soit A l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G' et supposons que A soit un ensemble infini non dénombrable. Soient (G'_n) les composantes connexes de G' et notons A_n l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G'_n. Il est clair que $A = \bigcup_n A_n$ et il existe donc un entier n_0 pour lequel A_{n_0} est infini; soient ζ_1 et ζ_2 deux points distincts de A_{n_0} et γ un arc de Jordan dans G'_{n_0} tel que $\gamma(0) = \zeta_1$ et $\gamma(1) = \zeta_2$; l'image par ψ de γ est un arc de Jordan dans Δ joignant deux points *distincts* de $\partial\Delta$ (cf. [6], p. 322); puisque $O = \psi(G)$ est connexe, $\partial\Delta$ n'est pas inclus dans ∂O et donc O n'est pas dominant dans Δ, ainsi que G dans U : $P(G)$ n'est donc pas fermé dans $H^\infty(G)$ d'après 2.2.

Exemple. ([7], th. 4.1).



G est l'ouvert hachuré: les points du segment $[0, a]$ sont accessibles à partir de G'; $P(G)$ n'est donc pas fermé dans $H^\infty(G)$.