

## 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

elle est croissante sur l'intervalle  $[0, t(x)[$  et décroissante sur l'intervalle  $]t(x), +\infty[$ .

(iv) pour tout réel  $\xi$  satisfaisant à l'inégalité  $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$  et tout réel positif

$\varepsilon$ , on a :

$$\int_{|t-x| > x^\xi} \varphi(x, t) dt = O(\exp\{-x^{2\xi-1-\varepsilon}\})$$

(v) on a pour  $x$  infini

$$\int_0^\infty \varphi(x, t) dt = 1 + O(e^{-x}).$$

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

$E$  et  $g$  gardant la même signification que dans l'énoncé du théorème 1, posons pour  $x$  réel positif et  $m$  entier

$$y = y(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} \frac{1}{p}$$

et

$$N(m, x) = \text{card} \{n \leq x : g(n) = m\}.$$

Halász a démontré dans [4] que l'on a, sous la seule hypothèse  $y(x) \rightarrow +\infty$ , pour tout réel  $\delta$  satisfaisant à  $0 < \delta \leq 1$ ,

$$(4) \quad N(m, x) = x \varphi(y, m) \left\{ 1 + O\left(\frac{|m-y|}{y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \right\},$$

uniformément pour  $\delta \leq \frac{m}{y} \leq 2 - \delta$  et  $y \geq 2$ .

Notant  $\mathcal{B} = g^{-1}(\mathcal{A})$ , on a pour tout  $x$  positif

$$B(x) := \text{card} \{n \leq x : n \in \mathcal{B}\} = \sum_{m \in \mathcal{A}} N(m, x).$$

Fixons alors un nombre réel  $\xi$  dans l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right[$ , on a :

$$(5) \quad B(x) = \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} N(m, x) + O\left(\sum_{|m-y| > y^\xi} N(m, x)\right).$$

Dans le cas particulier où  $\mathcal{A}$  est la suite de tous les entiers on a d'une part  $B(x) = [x]$  et d'autre part, compte tenu de (4),

$$\begin{aligned} \sum_{|m-y| \leq y^\xi} N(m, x) &= x \left( 1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right) \sum_{|m-y| \leq y^\xi} \varphi(y, m) \\ &= x \left( 1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right) \left( \int_{|t-y| \leq y^\xi} \varphi(y, t) dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \right) \\ &= x \left( 1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right), \end{aligned}$$

en vertu des assertions (iv) et (v) du lemme 1. Cela montre que pour toute suite  $\mathcal{A}$  le terme reste de (5) est majoré par

$$[x] - x \left( 1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right) = o(x).$$

En reportant dans (5) et en utilisant (4) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{B(x)}{x} &= \left( 1 + O\left(\frac{1}{y^{1-\xi}}\right) \right) \sum_{\substack{m \in \mathcal{A} \\ |m-y| \leq y^\xi}} \varphi(y, m) + o(1) \\ &= (1 + o(1)) \left( \int_0^\infty \varphi(y, t) dA(t) + o(1) \right) + o(1) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

#### 4. LE RÉSULTAT ABÉLIEN

Le lemme suivant, dont la démonstration nous a été suggérée par H. Delange, nous sera utile.

LEMME 2. Soit  $A$  une fonction mesurable complexe vérifiant (1). Alors la relation (1) a lieu uniformément en  $c$  sur tout compact.

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que l'on a  $\alpha = 0$  dans (1).