2. Enoncés des résultats

[6] sont valables sur des corps de nombres algébriques L quelconques. Pour $m \geqslant 2$, [4] et [6] contiennent, sous certaines hypothèses faites sur $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, des majorations effectives pour les solutions de (1). Dans cet article nous donnons des généralisations communes des résultats effectifs mentionnés ci-dessus et de certains théorèmes effectifs [8], [9] obtenus dans le cas $s = 0$. Notre principal résultat a plusieurs applications. Certaines d'entre elles seront publiées dans [7].

2. Enoncés des résultats

Soient L, K, β et $\pi_1, \ldots, \pi_s$ comme plus haut. Supposons $\overline{|\beta|} \leqslant b$ et $\max_{1 \leq i \leq s} \overline{|\pi_i|} \leqslant \mathscr{P}$ $(\geqslant 2)$ ($\overline{|\alpha|}$ désigne la maison d'un nombre algébrique α, i.e. le maximum des valeurs absolues des racines du polynôme minimal de α sur $\mathbf{Z}$). Pour $s = 0$ soit $P = \mathscr{P} = 2$. Soient D_K le discriminant de K, et G une extension galoisienne de L contenant K. Désignons par h_G et R_G (resp. h_L et R_L) le nombre de classes et le régulateur de G (resp. de L). Posons $[G : \mathbf{Q}] = g$, $[G : L] = f$ et soit r le nombre des unités fondamentales de G.

Nous disons que les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ $(m \geqslant 2)$ sont *connexes* par rapport à K/L si le système $\mathscr{L}$ des formes linéaires $l^{(i)}(x) = \alpha_1^{(i)} x_1 + \ldots + \alpha_m^{(i)} x_m$, $i = 1, \ldots, n$, est connexe; i.e. si pour tout $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, il existe une suite $l^{(i)} = l^{(i_1)}, \ldots, l^{(i_v)} = l^{(j)}$ dans $\mathscr{L}$ telle que $\lambda'_{i_\mu} l^{(i_\mu)} + \lambda''_{i_{\mu+1}} l^{(i_{\mu+1})} \in \mathscr{L}$ avec $\lambda'_{i_\mu}, \lambda''_{i_{\mu+1}} \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0\}$, $\mu = 1, \ldots, v-1$ (cf. [8], [4] ou [6]).

Exemple 1. Il est évident que si $m = 2$, $0 \neq \alpha_1 \in L$ et $K = L(\alpha_2)$, alors α_1 et α_2 sont connexes par rapport à K/L.

Exemple 2. Si $K = L(\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ avec $[L(\alpha_i) : L] = n_i \geqslant 3$, $i = 2, \ldots, m$, et $n_2 \ldots n_m = n$, alors, d'après le Lemme 4 de [8], les nombres $1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont connexes par rapport à K/L.

Soit

$$C = (25(r+sf+3)g)^{k(24(r+2)+sf(2r+13))} R_L^*(h_L \log \mathscr{P})^{3k-2} \,.$$
$$.\,(|D_K|^{1/2}(\log |D_K|)^{ln})^{k-1}(P^g(\log P)^7 R_G \log^3(R_G^* h_G))^k \,.$$
$$.\,(R_G + h_G \log P)^{k(sf+2)} \,,$$

où

$$R_L^* = \max(R_L, e) \quad \text{et} \quad R_G^* = \max(R_G, e).$$

Avec les notations et définitions données ci-dessus, on a les résultats suivants:

THÉORÈME 1. *Avec les notations ci-dessus, soient* $L = K_o \subset K_1 \subset \dots \subset K_k = K$ *des corps de nombres algébriques vérifiant* $[K_i : K_{i-1}] \geqslant 3$, $i = 1, \dots, k$. *Soit* $M_i \subset \mathbf{Z}_{K_i}$ *un* $\mathbf{Z}_L$*-module avec générateurs de maison* $\leqslant A'$ *qui sont* K_{i-1}*-linéairement indépendants et connexes par rapport à* K_i/K_{i-1}, $i = 1, \dots, k$. *Si* $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in M_1 \dots M_k$ *sont linéairement indépendants sur* L *et* $\overline{|\alpha_j|} \leqslant A, j = 1, \dots, m$, *alors toute solution* $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{Z}_L$, $z_1, \dots, z_s \geqslant 0$ *de* (1) *vérifie*

$$\max\left(\overline{|x_1|}, \dots, \overline{|x_m|}, (p_1^{f_1 z_1} \dots p_s^{f_s z_s})^{h_L/ln}\right) \tag{2}$$
$$< (A^{ml(s+1)} d^s)^{\log \mathscr{P}} \exp\{C(R_G + h_G \log P)\}(A'b)^C.$$

Pour $k = 1$ cette assertion résulte du Théorème 2 de [6]. Le Théorème 1 généralise, à la forme de la borne près, les résultats de [20], [2], [3], [17], [18], [19], [10], [11], [8], [9], [4] et [6] qui sont mentionnés dans l'introduction.

Comme il est connu, dans (1) on peut supposer sans restreindre la généralité que $\alpha_1 = 1$.

COROLLAIRE 1. *Supposons que* $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbf{Z}_K, \overline{|\alpha_i|} \leqslant A = A'$, $K_1 = L, K_i = L(\alpha_2, \dots, \alpha_i), K_m = K$ *et* $[K_i : K_{i-1}] \geqslant 3, i = 2, \dots, m$. *Alors toute solution de* (1) *vérifie* (2) *avec* $k = m - 1$.

Quand $s = 0$, le Corollaire 1 est un cas particulier de notre Théorème 3 dans [8].

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Corollaire 1.

COROLLAIRE 2. *Soient* $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbf{Z}_K$ *vérifiant* $\overline{|\alpha_i|} \leqslant A = A'$ *et* $K = L(\alpha_2, \dots, \alpha_m)$. *Si* $[L(\alpha_i) : L] = n_i \geqslant 3, i = 2, \dots, m$ *et* $n_2 \dots n_m = [K : L]$, *alors toute solution de* (1) *vérifie* (2) *avec* $k = m - 1$.

Le Corollaire 2 a été démontré, avec une majoration différente de (2), dans [6].

Si $0 \neq \alpha \in \mathbf{Z}_L$, notons $\omega(\alpha)$ le nombre des idéaux premiers distincts de L divisant α, et $P(\alpha)$ le maximum des normes de ces idéaux. Du Théorème 1 on peut déduire le

THÉORÈME 2. *Soient* L, K, d *et* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *comme dans le Théorème 1, et soit* $F(x) = N_{K/L}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)$. *Il existe des constantes effectives*

$c_i = c_i(K, L, A, A', d) > 0, i = 1, 2,$ *et* $N_o = N_o(K, L, A, A', d)$ *telles que*

$$s \log(s+1) + \log P > c_1 \log\log N \tag{3}$$

et

$$P > c_2 \log\log N \tag{4}$$

pour tout $x \in \mathbf{Z}_L^m$ *avec* $N((x_1, \ldots, x_m)) \leqslant d$ *et* $N = \max_{1 \leq i \leq m} |N_{L/Q}(x_i)| \geqslant N_o$, *où* $s = \omega(F(x))$ *et* $P = P(F(x))$.

Le Théorème 2 généralise certains récents résultats de Kotov [10] et Györy [4].

3. Démonstrations

La démonstration du Théorème 1 sera basée sur le théorème ci-dessous. Avec les notations du paragraphe précédent, on a le

Théorème A. *Soit* $M = \{\mu_1, \ldots, \mu_t\} \subset \mathbf{Z}_K$ *un* $\mathbf{Z}_L$*-module. Supposons* $\mu_1, \ldots, \mu_t$ *L-linéairement indépendants, connexes par rapport à* K/L *et* $\max_j \overline{|\mu_j|} \leqslant A'$. *Si* $y \in M$ *et*

$$N_{K/L}(y) = \beta \pi_1^{z_1} \ldots \pi_s^{z_s}$$

avec des entiers $z_i \geqslant 0$, *alors* $y = \pi_1^{u_1} \ldots \pi_s^{u_s} y'$, *où* $u_1, \ldots, u_s \geqslant 0$ *sont des entiers*, $y' \in \mathbf{Z}_K$,

$$\overline{|y'|} < T$$

et

$$T = \exp\{c_3 R_L^* h_L P^g (\log P)^5 R_G \log^3(R_G^* h_G)(R_G + h_G \log P)^{sf+2} \,.$$
$$. (\log \mathscr{P})(R_G + h_G \log P + \log(A'b))\}$$

avec

$$c_3 = (25(r + sf + 3) g)^{22r + 13sf + 2rsf + 44}.$$

Ce théorème est une conséquence [1]) du théorème 2 du travail [6] (voir encore la majoration (45) de [4]). Dans la démonstration du théorème 2 de [6], nous avons utilisé la méthode de Baker.

---

[1]) Le théorème 2 de [6] est vrai pour toute extension galoisienne de L contenant le corps de décomposition de F.