

2. Enoncés des résultats

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

[6] sont valables sur des corps de nombres algébriques L quelconques. Pour $m \geq 2$, [4] et [6] contiennent, sous certaines hypothèses faites sur $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, des majorations effectives pour les solutions de (1). Dans cet article nous donnons des généralisations communes des résultats effectifs mentionnés ci-dessus et de certains théorèmes effectifs [8], [9] obtenus dans le cas $s = 0$. Notre principal résultat a plusieurs applications. Certaines d'entre elles seront publiées dans [7].

2. ENONCÉS DES RÉSULTATS

Soient L, K, β et π_1, \dots, π_s comme plus haut. Supposons $|\beta| \leq b$ et $\max_{1 \leq i \leq s} |\pi_i| \leq \mathcal{P}$ (≥ 2) ($|\alpha|$ désigne la maison d'un nombre algébrique α , i.e. le maximum des valeurs absolues des racines du polynôme minimal de α sur \mathbf{Z}). Pour $s = 0$ soit $P = \mathcal{P} = 2$. Soient D_K le discriminant de K , et G une extension galoisienne de L contenant K . Désignons par h_G et R_G (resp. h_L et R_L) le nombre de classes et le régulateur de G (resp. de L). Posons $[G : \mathbf{Q}] = g$, $[G : L] = f$ et soit r le nombre des unités fondamentales de G .

Nous disons que les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ ($m \geq 2$) sont *connexes* par rapport à K/L si le système \mathcal{L} des formes linéaires $l^{(i)}(x) = \alpha_1^{(i)} x_1 + \dots + \alpha_m^{(i)} x_m$, $i = 1, \dots, n$, est connexe; i.e. si pour tout $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, il existe une suite $l^{(i)} = l^{(i_1)}, \dots, l^{(i_v)} = l^{(j)}$ dans \mathcal{L} telle que $\lambda'_{i_\mu} l^{(i_\mu)} + \lambda''_{i_\mu+1} l^{(i_\mu+1)} \in \mathcal{L}$ avec $\lambda'_{i_\mu}, \lambda''_{i_\mu+1} \in \overline{\mathbf{Q}} \setminus \{0\}$, $\mu = 1, \dots, v-1$ (cf. [8], [4] ou [6]).

EXEMPLE 1. Il est évident que si $m = 2$, $0 \neq \alpha_1 \in L$ et $K = L(\alpha_2)$, alors α_1 et α_2 sont connexes par rapport à K/L .

EXEMPLE 2. Si $K = L(\alpha_2, \dots, \alpha_m)$ avec $[L(\alpha_i) : L] = n_i \geq 3$, $i = 2, \dots, m$, et $n_2 \dots n_m = n$, alors, d'après le Lemme 4 de [8], les nombres $1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sont connexes par rapport à K/L .

Soit

$$C = (25(r + sf + 3)g)^{k(24(r+2) + sf(2r+13))} R_L^* (h_L \log \mathcal{P})^{3k-2} \cdot (|D_K|^{1/2} (\log |D_K|)^{ln})^{k-1} (P^g (\log P)^7 R_G \log^3 (R_G^* h_G))^k \cdot (R_G + h_G \log P)^{k(sf+2)},$$

où

$$R_L^* = \max (R_L, e) \quad \text{et} \quad R_G^* = \max (R_G, e).$$

Avec les notations et définitions données ci-dessus, on a les résultats suivants :

THÉORÈME 1. *Avec les notations ci-dessus, soient $L = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_k = K$ des corps de nombres algébriques vérifiant $[K_i : K_{i-1}] \geq 3$, $i = 1, \dots, k$. Soit $M_i \subset \mathbf{Z}_{K_i}$ un \mathbf{Z}_L -module avec générateurs de maison $\leq A'$ qui sont K_{i-1} -linéairement indépendants et connexes par rapport à K_i/K_{i-1} , $i = 1, \dots, k$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in M_1 \dots M_k$ sont linéairement indépendants sur L et $|\overline{\alpha_j}| \leq A, j = 1, \dots, m$, alors toute solution $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{Z}_L, z_1, \dots, z_s \geq 0$ de (1) vérifie*

$$(2) \quad \max (|\overline{x_1}|, \dots, |\overline{x_m}|, (p_1^{f_1 z_1} \dots p_s^{f_s z_s})^{h_L / l_n}) < (A^{ml(s+1)} d^s)^{\log \mathcal{P}} \exp \{ C (R_G + h_G \log P) \} (A'b)^C.$$

Pour $k = 1$ cette assertion résulte du Théorème 2 de [6]. Le Théorème 1 généralise, à la forme de la borne près, les résultats de [20], [2], [3], [17], [18], [19], [10], [11], [8], [9], [4] et [6] qui sont mentionnés dans l'introduction.

Comme il est connu, dans (1) on peut supposer sans restreindre la généralité que $\alpha_1 = 1$.

COROLLAIRE 1. *Supposons que $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbf{Z}_K, |\overline{\alpha_i}| \leq A = A', K_1 = L, K_i = L(\alpha_2, \dots, \alpha_i), K_m = K$ et $[K_i : K_{i-1}] \geq 3, i = 2, \dots, m$. Alors toute solution de (1) vérifie (2) avec $k = m - 1$.*

Quand $s = 0$, le Corollaire 1 est un cas particulier de notre Théorème 3 dans [8].

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Corollaire 1.

COROLLAIRE 2. *Soient $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbf{Z}_K$ vérifiant $|\overline{\alpha_i}| \leq A = A'$ et $K = L(\alpha_2, \dots, \alpha_m)$. Si $[L(\alpha_i) : L] = n_i \geq 3, i = 2, \dots, m$ et $n_2 \dots n_m = [K : L]$, alors toute solution de (1) vérifie (2) avec $k = m - 1$.*

Le Corollaire 2 a été démontré, avec une majoration différente de (2), dans [6].

Si $0 \neq \alpha \in \mathbf{Z}_L$, notons $\omega(\alpha)$ le nombre des idéaux premiers distincts de L divisant α , et $P(\alpha)$ le maximum des normes de ces idéaux. Du Théorème 1 on peut déduire le

THÉORÈME 2. *Soient L, K, d et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ comme dans le Théorème 1, et soit $F(x) = N_{K/L}(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m)$. Il existe des constantes effectives*

$c_i = c_i(K, L, A, A', d) > 0, i = 1, 2,$ et $N_o = N_o(K, L, A, A', d)$ telles que

$$(3) \quad s \log(s+1) + \log P > c_1 \log \log N$$

et

$$(4) \quad P > c_2 \log \log N$$

pour tout $x \in \mathbf{Z}_L^m$ avec $N((x_1, \dots, x_m)) \leq d$ et $N = \max_{1 \leq i \leq m} |N_{L/Q}(x_i)| \geq N_o$, où $s = \omega(F(x))$ et $P = P(F(x))$.

Le Théorème 2 généralise certains récents résultats de Kotov [10] et Györy [4].

3. DÉMONSTRATIONS

La démonstration du Théorème 1 sera basée sur le théorème ci-dessous. Avec les notations du paragraphe précédent, on a le

THÉORÈME A. Soit $M = \{\mu_1, \dots, \mu_t\} \subset \mathbf{Z}_K$ un \mathbf{Z}_L -module. Supposons μ_1, \dots, μ_t L -linéairement indépendants, connexes par rapport à K/L et $\max_j |\overline{\mu_j}| \leq A'$. Si $y \in M$ et

$$N_{K/L}(y) = \beta \pi_1^{z_1} \dots \pi_s^{z_s}$$

avec des entiers $z_i \geq 0$, alors $y = \pi_1^{u_1} \dots \pi_s^{u_s} y'$, où $u_1, \dots, u_s \geq 0$ sont des entiers, $y' \in \mathbf{Z}_K$,

$$|y'| < T$$

et

$$T = \exp \{ c_3 R_L^* h_L P^g (\log P)^5 R_G \log^3 (R_G^* h_G) (R_G + h_G \log P)^{sf+2} \cdot (\log \mathcal{P}) (R_G + h_G \log P + \log(A'b)) \}$$

avec

$$c_3 = (25(r + sf + 3)g)^{22r + 13sf + 2rsf + 44}.$$

Ce théorème est une conséquence ¹⁾ du théorème 2 du travail [6] (voir encore la majoration (45) de [4]). Dans la démonstration du théorème 2 de [6], nous avons utilisé la méthode de Baker.

¹⁾ Le théorème 2 de [6] est vrai pour toute extension galoisienne de L contenant le corps de décomposition de F .