

## §2. The case of generalized flag manifolds

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

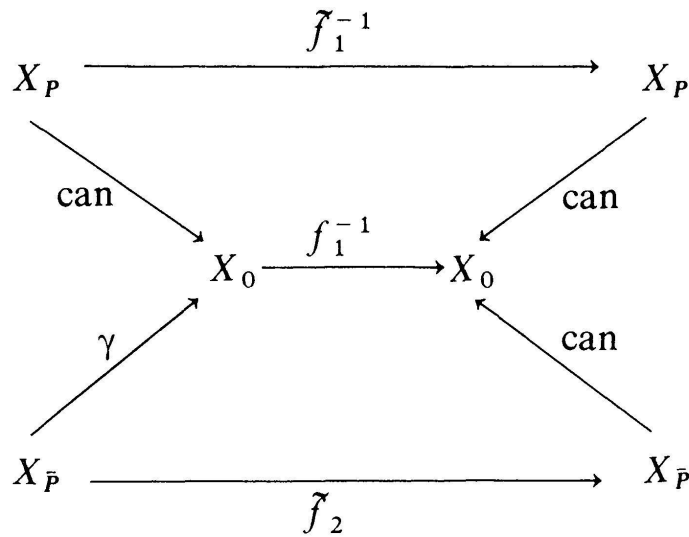
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.



which shows that  $Y \simeq X$ .

§2. THE CASE OF GENERALIZED FLAG MANIFOLDS

The following result is an easy consequence of [F].

LEMMA 2.1. Let  $M$  be a generalized flag manifold. Then the following holds.

- a) If  $g(\lambda) \in Gr(M_0)$  is a grading map with  $\lambda \in \mathbf{Z}_Q^*$  for some (not necessarily finite) set of primes  $Q$ , then  $g(\lambda)$  lifts to a homotopy equivalence  $\tilde{g}(\lambda): M_Q \rightarrow M_Q$ .
- b) Let  $P$  be an arbitrary set of primes with complement  $\bar{P}$ . Then every

$$f \in \langle Gr(M_0), N(H)/H \rangle$$

may be written in the form  $f = f_1 \circ f_2$  with

$$f_1 \in \text{im}(E(M_P) \rightarrow E(M_0))$$

and

$$f_2 \in \text{im}(E(M_{\bar{P}}) \rightarrow E(M_0)).$$

*Proof.* Let  $\lambda = k/l$  with  $k$  and  $l$  relatively prime integers. Then  $g(k)$  and  $g(l)$  lift to equivalences

$$\tilde{g}(k), \tilde{g}(l): M_Q \rightarrow M_Q.$$

since necessarily  $k, l \in \mathbf{Z}_Q^*$  (compare [F]). Thus  $\tilde{g}(k) \tilde{g}(l)^{-1}$  is a lift of  $g(\lambda)$ . For b) we note that  $f = g(\rho) \circ \sigma$  for some  $\rho \in \mathbf{Q}^*$  and

$$\sigma \in N(H)/H.$$

If we write  $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$  with  $\rho_1 \in \mathbf{Z}_P^*$  and  $\rho_2 \in \mathbf{Z}_P^*$ , then

$$f = g(\rho_1) \cdot (g(\rho_2) \sigma)$$

and we may choose

$$f_1 = g(\rho_1), f_2 = g(\rho_2) \sigma.$$

Since  $\sigma$  lifts even to  $E(M)$ , we infer by using a) that  $f_1$  and  $f_2$  lift as desired.

A final step towards proving the Theorem formulated in the introduction consists in the following.

LEMMA 2.2. Let  $M$  be a generalized flag manifold for which Conjecture C holds. Then for every finite set of primes  $P$ ,

$$P\text{-Seq}(E(M_0)) = \{[1, 1, \dots, 1]\}.$$

*Proof.* Let  $\{[\mu_1, \dots, \mu_n]\} \in P\text{-Seq}(E(M_0))$ , where  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  and

$$\mu_i \in \text{im}(E(M_{p_i}) \rightarrow E(M_0))$$

for all  $i$ . Then  $\mu_i = g(\lambda_i) \circ \sigma_i$  with  $\lambda_i \in \mathbf{Q}^*$  and

$$\sigma_i \in N(H)/H \subset E(M_0).$$

Define  $\lambda \in \mathbf{Q}^*$  by  $\lambda = \prod p_i^{m_i}$ , where  $m_i \in \mathbf{Z}$  is such that  $p_i^{m_i} \lambda_i \in \mathbf{Z}_{p_i}^*$ . Then  $g(\lambda) \mu_i = g(\lambda \lambda_i) \sigma_i$  with  $\lambda \lambda_i \in \mathbf{Z}_{p_i}^*$ . By Lemma 2.1 a) we know that  $g(\lambda \lambda_i)$  lifts to  $M_{p_i}$ , and since  $\sigma_i$  lifts even to  $M$  we conclude that

$$h(p_i) = g(\lambda \lambda_i) \sigma_i \in \text{im}(E(M_{p_i}) \rightarrow E(M_0))$$

for all  $i$ . The equation

$$g(\lambda) \mu_i = h(p_i), i \in \{1, \dots, n\}$$

show that  $\{[\mu_1, \dots, \mu_n]\} = \{[1, \dots, 1]\} \in P\text{-Seq}(E(M_0))$ .

The proof of the main Theorem:

Let  $M$  be a generalized flag manifold for which the Conjecture C holds. Since  $M$  is a formal space we can find for every  $N \in G(M)$  a rational equivalence

$f(N): N \rightarrow M$ . Let  $P(M)$  denote the set of primes which appear in any of the orders of

$$\ker (f(N)_* : H_*(N; \mathbf{Z}) \rightarrow H_*(M; \mathbf{Z}))$$

or  $\text{coker } f(N)_*$ ,  $N$  ranging over  $G(M)$ . The set  $P(M)$  is finite, since each  $\ker f(N)_*$  and  $\text{coker } f(N)_*$  is finite and since  $G(M)$  is a finite set by [W]. Consider now the map

$$\theta: G(M) \rightarrow P\text{-Seq } E(M_0)$$

with respect to this finite set of primes  $P(M) = P$ . Since  $P$  is finite,

$$P\text{-Seq } (E(M_0))$$

consists of only one element (Lemma 2.2). It remains to show that

$$\theta^{-1}(\theta(M)) = \{M\}.$$

For this we apply Lemma 1.3. Note that  $N \in G(M)$  implies  $N_{\bar{P}} \simeq M_{\bar{P}}$  since  $f(N): N \rightarrow M$  is a  $\bar{P}$ -equivalence. Moreover, the condition b) of 1.3 is satisfied in view of Lemma 2.1 b). Therefore we conclude that  $G(M) = \{[M]\}$  and the proof is completed.

*Note added in proof.* Since this paper went to press, we have been informed that Conjecture C has been proved for the case  $k = 2, n_1 = n_2$ , by M. Hoffman: "Cohomology endomorphisms of complex flag manifolds", Ph.D. dissertation, MIT 1981. As a consequence, it follows that all complex Grassmann manifolds are generically rigid.