3. Critère pour groupes libres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

3. Critère pour groupes libres

Il s'agit du critère suivant:

(3.1) Proposition. *Soient G un groupe agissant sur un ensemble X, B un sous-ensemble de G et H le sous-groupe de G engendré par B. Supposons qu'il existe une collection L_v $(v \in B)$ de sous-ensembles de X et un élément d de $X - \bigcup_{v \in B} L_v$ tels que $b^n (L_v \cup \{ d \}) \subset L_b$ pour tout b et $v \in B$ avec $b \neq v$ et tout $n \in \mathbf{Z} - \{ 0 \}$. Alors H est libre de base B.*

Démonstration. Soit $w = v_1^{n1} v_2^{n2} \dots v_k^{nk}$, avec $v_i \in B$, $n_i \in \mathbf{Z}$ et $v_i \neq v_{i+1}$. On sait que H est libre de base B si, pour tout élément w satisfaisant aux conditions ci-dessus, l'équation $w = 1$ n'est possible que si $n_i = 0$ pour tout i (conséquence de [L-S, Chap. 1, Prop. 1.9], par exemple). Or, les hypothèses de (3.1) impliquent que $wd \in L_{v_1}$. Comme $d \notin L_{v_1}$, on a $wd \neq d$, d'où $w \neq 1$. ■

Le critère (3.1) est un cas particulier d'un énoncé de Tits [Ti 2, Prop. 1.1] (énoncé qui sera lui-même généralisé au § 4). Mais son usage implicite est plus ancien. Dans [F-K, pp. 190-194] ou [Le, pp. 118-120], on l'utilise pour démontrer la liberté des groupes de Schottky: soient (P_i, Q_i) m paires de cercles dans $\mathbf{C}$ tels que tous les cercles soient extérieurs les uns aux autres. Soient $b_i : \mathbf{C} \cup \{ \infty \} \to \mathbf{C} \cup \{ \infty \}$ des transformations de Möbius telles que b_i (extérieur (P_i)) $\subset$ intérieur (Q_i), $(i = 1, \dots m)$. On déduit qur les b_i engendrent un groupe libre de rang n dans le groupe de Möbius en appliquant (3.1) à L_{b_i} $=$ intérieur $(P_i) \cup$ intérieur (Q_i) et $d = \infty$.

Nous allons maintenant utiliser notre critère (3.1) pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Serre [Se, Théorème 4′, § 3.3]:

(3.2) Théorème. *Soit G un groupe agissant librement sur un arbre Γ et soit A un arbre de représentants. Alors G est libre de base* $R_{\mathrm{Som}\, A}$ (voir (2.4)).

Démonstration. Comme l'action est libre, G est engendré par $R_{\mathrm{Som}\, A}$ en vertu de (2.4). Puisque A est connexe et que Γ est un arbre, il existe, pour chaque $r \in R_{\mathrm{Som}\, A}$ une *unique* arête $a_r \in \mathrm{Ar}\, \Gamma$ telle que $o(a_r) \in \mathrm{Som}\, A$ et $e(a_r) \in r\, \mathrm{Som}\, A$. On va appliquer le critère (3.1) à la situation:

$$X = \mathrm{Som}\, \Gamma \qquad L_r = \mathrm{Som}\, \mathscr{B}(a_r) \cup \mathrm{Som}\, \mathscr{R}(r^{-1} a_r) \qquad d \in \mathrm{Som}\, A$$

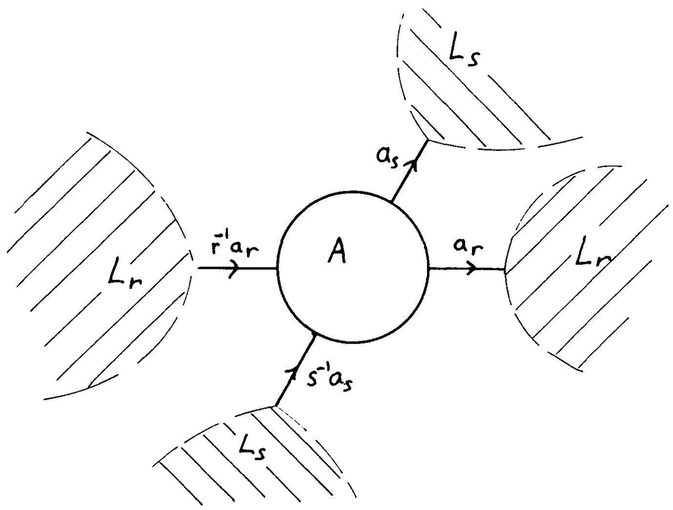

FIG. 2.

Soit $M_r = \text{Som}\, A \cup \left[\bigcup_{s \neq r} L_s \right] (r \in R_{\text{som}\, A})$. On déduit de la définition de $R_{\text{Som}\, A}$ que l'orbite de a_r ne contient aucune des arêtes de A et que

$$M_r \subset \mathscr{B}(r^{-1}a_r) \cap \mathscr{R}(a_r)\,.$$

Il s'en suit que, pour tout $n > 0$, on a

$$r^n M_r \subset \mathscr{B}(a_r) \subset L_r \quad \text{et} \quad r^{-n} M_r \subset \mathscr{R}(r^{-1}a_r) \subset L_r\,. \qquad \blacksquare$$

Rappelons maintenant la classification de Tits [Ti, Proposition 3.2] des automorphismes d'un arbre:

(3.3) PROPOSITION. *Soit g un automorphisme d'un arbre Γ. Alors, g possède l'une des deux propriétés suivantes (qui s'excluent mutuellement):*

1) *g laisse fixe un sommet de Γ;*
2) *il existe une unique chaîne infinie C_g de Γ stable par g et sur laquelle g agit par translation non-triviale.*

Remarque. Comme nos graphes sont orientés, le cas (ii) de la proposition 3.2 de [Ti] ne se produit pas. C'est pourquoi il n'y a que deux possibilités dans (3.3).

(3.4) PROPOSITION. *Soient g et h deux automorphismes d'un arbre Γ qui ne laissent aucun sommet fixe. Alors, si $\text{Ar}\, C_g \cap \text{Ar}\, C_h = \emptyset$, les automorphismes g et h engendrent un sous-groupe libre de rang 2 dans le groupe $\text{Aut}\, \Gamma$ des automorphismes de Γ.*

Démonstration. Deux cas peuvent se présenter:

a) $\mathrm{Som}\, C_g \cap \mathrm{Som}\, C_h = \{ v \} \subset \mathrm{Som}\, \Gamma$;

b) $\mathrm{Som}\, C_g \cap \mathrm{Som}\, C_h = \emptyset$.

Envisageons tout d'abord le cas a), et supposons qu'il existe des arêtes $a_g, a_g' \in C_g$ et $a_h, a_h' \in C_h$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$o(a_g) = e(a_g') = v = o(a_h) = e(a_h'),$$
$$ga_g \in \mathscr{B}(a_g) \quad \text{et} \quad ha_h \in \mathscr{B}(a_h).$$

Cette supposition est anodine car, dans les autres cas, la démonstration serait identique après adaptation des notations: changement éventuel de « $o(\ )$ » en « $e(\ )$ », de « $\mathscr{B}$ » en « $\mathscr{R}$ », etc. De la même manière que dans (3.2), la proposition (3.4) est une conséquence du critère (3.1) appliqué à la situation:

$$X = \mathrm{Som}\, \Gamma, \qquad d = v$$
$$L_g = \mathrm{Som}\, \mathscr{B}(a_g) \cup \mathrm{Som}\, \mathscr{R}(a_g')$$
$$L_h = \mathrm{Som}\, \mathscr{B}(a_h) \cup \mathrm{Som}\, \mathscr{R}(a_h')$$

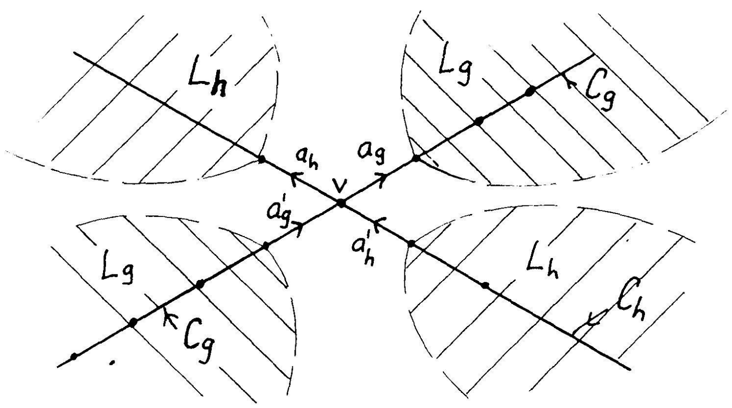

FIG. 3.

Dans le cas b), soit $c : CH_n \to \Gamma$ un chemin minimal reliant C_g à C_h. On peut supposer que $c(0) \in C_g$ et $c(n) \in C_h$, les autres cas donnant des démonstrations identiques à changement de notations près. On applique alors le critère (3.1) à la situation:

$$X = \mathrm{Som}\, \Gamma, \qquad d \in \mathrm{Som}\, c(CH_n) - \{ c(0), c(n) \}$$
$$L_g = \mathrm{Som}\, \mathscr{R}(c([o, 1])), \qquad L_h = \mathrm{Som}\, \mathscr{B}(c([n-1, n]))$$

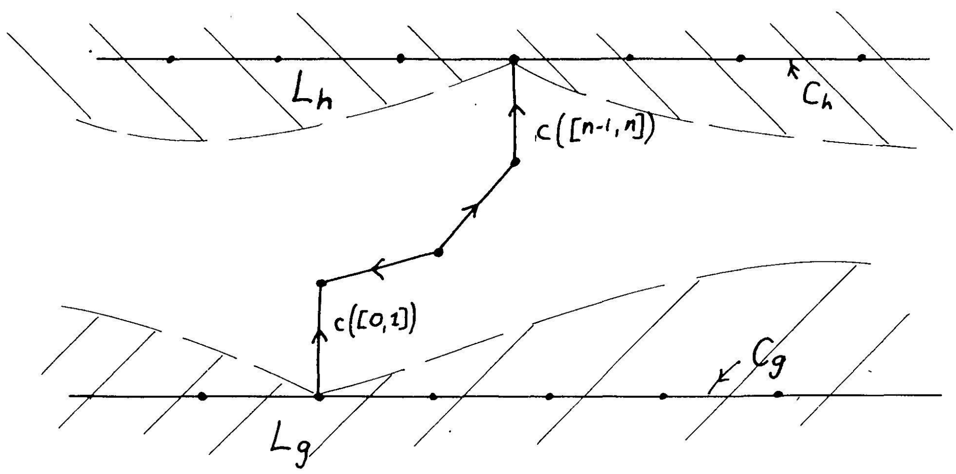

FIG. 4.

La seule difficulté est que le choix du sommet d ci-dessus n'est pas possible si $n = 1$. Ce cas fâcheux s'évite facilement en passant au premier subdivisé barycentrique de Γ. ■

(3.5) PROPOSITION. *Soient g_1 et g_2 deux automorphismes d'un arbre Γ qui ne laissent aucun sommet fixe. On suppose que g_i induit une translation d'amplitude k_i sur sa chaîne $C_i = C_{g_i}$ et que*

$$\text{Card}\,(\text{Ar}\, C_1 \cap \text{Ar}\, C_2) = q < \infty\,.$$

Soient r et s deux entiers satisfaisant à $rk_1 > q < sk_2$. Alors, les automorphismes g_1^r et g_2^s engendrent un groupe libre de rang 2 dans Aut Γ.

Démonstration. Puisque Γ est un arbre, le graphe $C_1 \cap C_2$ est connexe; il s'agit donc d'un chemin B de longueur q. On peut supposer que la première arête a de B a son origine à l'origine de B et que $g_i\, a \in \mathscr{B}(a)$ (les autres cas donnent lieu à des arguments identiques). De même, on peut supposer que les arêtes $a_1 \in \text{Ar}\, C_1$ et $a_2 \in \text{Ar}\, C_2$ « précédant » a sont orientées de façon que $e(a_1) = e(a_2) = o(a)$. L'hypothèse $rk_1 > q < sk_2$ implique que

$$B \subset \big(\mathscr{B}(a_1) \cap \mathscr{R}(g_1^r\, a_1)\big) \cap \big(\mathscr{B}(a_2) \cap \mathscr{R}(g_2^s\, a_2)\big)\,.$$

On va appliquer le critère (3.1) à la situation:

$$X = \text{Som}\,\Gamma \qquad d = e(a)$$
$$L_1 = \text{Som}\,\mathscr{R}(a_1) \cup \text{Som}\,\mathscr{B}(g_1^r\, a_1)$$
$$L_2 = \text{Som}\,\mathscr{R}(a_2) \cup \text{Som}\,\mathscr{B}(g_2^s\, a_2))$$

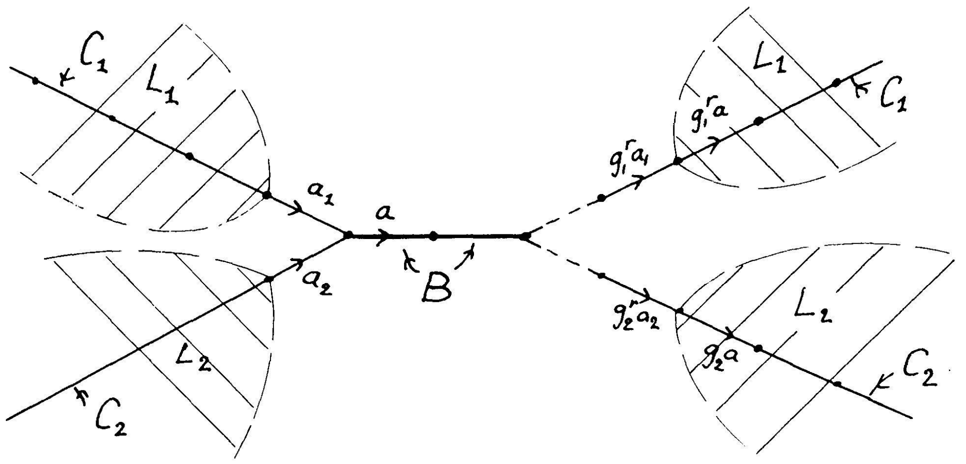

FIG. 5.

On vérifie les hypothèses de (3.1) comme pour la démonstration de (3.2), en utilisant que

$$L_1 \cup \{ d \} \subset \mathscr{B}(a_2) \cap \mathscr{R}(g_2^s\, a_2)$$

et

$$L_2 \cup \{ d \} \subset \mathscr{B}(a_1) \cap \mathscr{R}(g_1^r\, a_1)\,. \qquad \blacksquare$$

(3.6) *Exemple.* Considérons l'action habituelle par transformations homographiques du groupe $SL_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $H = \{ z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$. L'orbite de l'arc de cercle

$$a = \{ z = e^{i\theta} \mid \pi/2 < z < 2\pi/3 \}$$

constitue, comme le remarque Serre [Se, p. 52], la réalisation géométrique d'un arbre (voir figure 6 ci-dessous).

Soient $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire, en termes de transformations homographiques: $g(z) = z + 1$ et $g(z) = \dfrac{z}{z+1}$. On vérifie par calcul direct que ga, $g^{-1}a$, ha et $h^{-1}a$ sont les arêtes dessinées sur la figure 6:

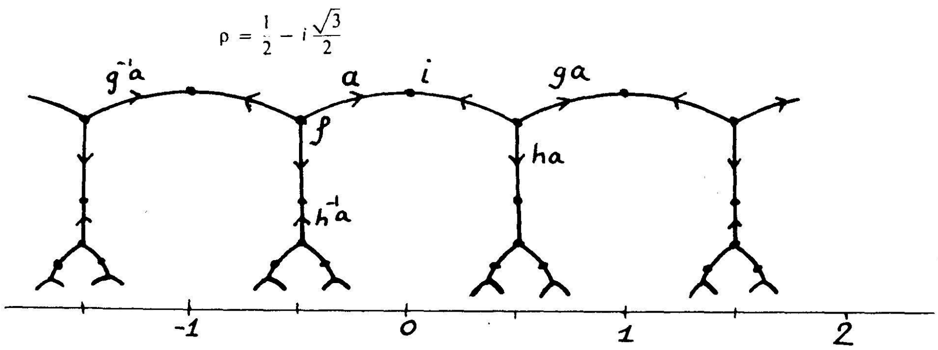

FIG. 6.

On en déduit que g et h translatent avec amplitude 2 des chaînes C_g et respectivement C_h, et $C_g \cap C_h$ contient l'arête a ainsi que sa transformée par $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La proposition (3.5) implique alors le fait (classique) que g^2 et h^2 engendrent un groupe libre de rang 2 dans $SL_2(\mathbf{Z})$. Observons que le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par g et h^2 n'est pas libre, comme en témoigne la relation $(gh^{-2})^4 = 1$. Ceci montre que l'hypothèse $rk_g > q < sk_h$ de (3.5) est essentielle.

4. Critères pour produits amalgamés

Soit B_i, $i \in J$, une famille de sous-groupes d'un groupe G et soit F un sous-groupe de $\bigcap_{i \in J} B_i$. Les inclusions $B_i \subset G$ s'étendent en un unique homomorphisme $\Psi : *_F B_i \to G$, où $*_F B_i$ dénote le produit de tous les B_i amalgamé sur F.

(4.1) Proposition. *Soient B_i, G et F comme ci-dessus. On suppose que le groupe G agit sur un ensemble X et qu'il existe une famille L_i $(i \in J)$ de sous-ensembles de X et un élément $d \in X - \bigcup_{i \in J} L_i$ tels que:*

1) $F \subset G_d$

2) $(B_i - F)(L_j \cup \{ d \}) \subset L_i$, pour tout $i, j \in J$ avec $i \neq j$.

Alors, l'homomorphisme $\Psi : *_F B_i \to G$ induits par les inclusions $B_i \subset G$ est injectif.

Démonstration. Tout élément $g \in *_F B_i$ peut s'écrire $g = g_1 f$ avec $f \in F$ et $g_1 = b_n b_{n-1} \dots b_1$, où les B_k sont des éléments de $B_{i(k)} - F$, avec $i(k) \in J$ et $i(k) \neq i(k+1)$. Si $\Psi(g) = 1$ et $g \neq 1$, cela entraîne que $g_1 \neq 1$, puisque $\Psi \mid F$ est injectif. Mais alors, si $g_1 \neq 1$, nos hypothèses font que $\Psi(g) d \in L_{i(n)}$. Comme $d \notin L_{i(n)}$, cela montre que $\Psi(g) \neq 1$, d'où Ψ est injectif. ■

(4.2) *Remarques.* 1) Il résulte de la démonstration ci-dessus que l'hypothèse 2) de (4.1) peut être affaiblie en: $X_i(L_j \cup \{ d \}) \subset L_i$, pour tout i, $j \in J$ avec $i \neq j$, où X_i est un ensemble de représentants des classes à gauche non-triviales de B_i modulo F.

2) Le cas $F = 1$ redonne la Proposition 1.1 de [Ti 2].