

# Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE $N$

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS

ABSTRACT. Let  $\omega(n)$  be the number of prime factors of  $n$ ;  $n$  is said  $\omega$ -largely composite if  $m \leq n \Rightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$ .

The quantity  $Q_l(X)$  of such numbers  $\leq X$  verifies  $e^{c_1\sqrt{\log X}} \leq Q_l(X) \leq e^{c_2\sqrt{\log X}}$ . Then we prove

$$\text{card} \left\{ n \leq x \mid \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x} \right\} = x^{1-c+o(1)}$$

and if  $\Omega(n)$  is the total number of prime factors of  $n$  counted according to multiplicity,  $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1 + o(1))$ .

An integer  $n$  is defined  $\omega$ -interesting if

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

A short study of these numbers is given. We prove that there exists infinitely many strangulation points  $(n_k)$  for the function  $n - \omega(n)$

i.e. such that:  $m < n_k \Rightarrow m - \omega(m) < n_k - \omega(n_k)$

and  $m > n_k \Rightarrow m - \omega(m) > n_k - \omega(n_k)$

Finally, we deduce from some formula of A. Selberg the exact order of  $\text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) > \alpha \log \log x\}$  for  $\alpha > 1$ .

## INTRODUCTION

Soit  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$  la décomposition en facteurs premiers de  $n$ . On définit  $\omega(n) = k$  et  $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ . Les fonctions  $\omega$  et  $\Omega$  sont additives: une fonction  $f$  est additive si  $(m, n) = 1$  entraîne  $f(mn) = f(m) + f(n)$ . Hardy et Ramanujan (cf. [Har]) ont démontré en 1917 que la

valeur moyenne de  $\omega(n)$  était  $\log \log n$ . En 1934, P. Turan donnait une démonstration simple de ce résultat, en prouvant: (cf. [Tur])

$$\sum_{n=1}^x (\omega(n) - \log \log x)^2 = O(x \log \log x).$$

En 1939, M. Kac et P. Erdős démontraient (cf. [Kac]):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{card} \{ n \leq x; \omega(n) \leq \log \log x + t \sqrt{\log \log x} \} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du. \end{aligned}$$

Ensuite, P. Erdős ([Erd 1]) et L. G. Sathe ([Sat]) s'intéressaient aux entiers  $n \leq x$  tels que  $\omega(n)$  soit de l'ordre de  $c \log \log x$ . A. Selberg ([Sel 1]) donnait la « formule de Selberg »

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = z F(z) x (\log x)^{z-1} + o(x (\log x)^{\text{Re}(z-2)})$$

où pour  $R > 0$ , le  $O$  est uniforme pour  $|z| \leq R$ ;  $F(z)$  est la fonction entière

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left( 1 + \frac{z}{p-1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^z.$$

Cette formule permet d'obtenir plus simplement les résultats de Sathe. Dans la proposition 3, nous suivrons les idées de A. Selberg pour calculer un équivalent de:

$$\text{card} \{ n \leq x \mid \omega(n) > \alpha \log \log x \}, \quad \alpha > 1.$$

La formule (1) a été étendue par H. Delange (cf. [Del 1] et [Del 2]).

Soit  $p_k$  le  $k^{\text{ième}}$  nombre premier et posons  $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$ . Ce nombre  $A_k$  est le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $\omega(n) = k$ . On dit que  $n$  est  $\omega$ -hautement composé si  $m < n \Rightarrow \omega(m) < \omega(n)$ . La suite des nombres  $\omega$ -hautement composés est la suite  $A_k$ .

A l'aide du théorème des nombres premiers, on a:  $\log A_k \sim p_k \sim k \log k$ ; on en déduit que pour tout  $n$  (cf. [Wri], ch. XVIII):

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1))$$

et que  $Q_h(X)$  le nombre de nombres  $\omega$ -hautement composés  $\leq X$  vérifie:

$$Q_h(X) \sim \frac{\log X}{\log \log X}.$$

On dit maintenant que  $n \geq 2$  est  $\omega$ -largement composé, si  $1 \leq m \leq n \Rightarrow \omega(m) \leq \omega(n)$ . Si  $A_k \leq n < A_{k+1}$ ,  $n$  est  $\omega$ -largement composé si et seulement si  $\omega(n) = k$ . Soit  $Q_l(X)$  le nombre de nombres  $\omega$ -largement composés  $\leq X$ . Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Il existe deux constantes  $0 < c_1 < c_2$  telles que :*

$$\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leq Q_l(X) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

Nous démontrerons ensuite:

THÉORÈME 2. *Soit  $c$ ,  $0 < c < 1$ . On a :*

$$f_c(x) = \text{card} \left\{ n \leq x; \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x} \right\} = x^{1-c+o(1)}.$$

Entre les résultats obtenus par la formule de Selberg et le théorème 2, il y a un trou à boucher, pour estimer par exemple:  $\text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) > (\log x)^\alpha\}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Kolesnik et Straus (cf. [Kol]) ont donné une formule asymptotique assez compliquée qui fournit partiellement une solution à ce problème.

Nous nous intéresserons ensuite aux valeurs extrêmes de  $f(n) + f(n+1)$ , pour quelques fonctions arithmétiques  $f$ . Nous démontrerons en particulier:

THÉORÈME 3. *On a, pour  $n \rightarrow +\infty$  :*

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leq \frac{\log n}{\log 2} (1 + o(1)).$$

Au paragraphe IV, nous disons qu'un nombre  $n$  est  $\omega$ -intéressant si:

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Cette définition caractérise une famille de nombres  $n$  qui ont beaucoup de facteurs premiers, en les comparant avec des nombres  $m$  plus grands que  $n$  (contrairement à la définition des nombres hautement composés). Nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on dit qu'une fonction  $f$  a un point d'étranglement en  $n$ , si

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) \quad \text{et} \quad m > n \Rightarrow f(m) > f(n).$$

Interprétation géométrique: Le graphe de  $f$ , contenu dans l'angle droit de sommet  $(n, f(n))$  et de côté parallèle aux axes, s'étrangle en  $n$ . Nous démontrons:

THÉORÈME 4. *La fonction  $n \rightarrow n - \omega(n)$  a une infinité de points d'étranglement.*

Pour démontrer ce théorème, nous construirons une infinité de points  $n$  tels qu'il existe juste avant  $n$ , une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

### § 1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

*Minoration:* D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) il existe entre  $(1 - 2\varepsilon) \log X$  et  $(1 - \varepsilon) \log X$  un nombre  $x$  tel que:

$$\pi(x + f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \quad \text{et} \quad \pi(x) - \pi(x - f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x}$$

pour toute fonction  $f(x)$  croissante, vérifiant  $f(x) > x^{1/6}$  et telle que  $\frac{f(x)}{x}$  décroisse et tende vers 0.

On choisit  $f(x) = c \sqrt{x} \log x$ . Soit  $k$  tel que  $p_k \leq x < p_{k+1}$ . On considère la famille de nombres:

$$n = A_{k-r} q_1 \dots q_r, \quad 0 \leq r \leq s$$

où  $q_1, \dots, q_r$  sont des nombres premiers distincts choisis parmi  $p_{k+1}, \dots, p_{k+s}$ . De tels nombres vérifient  $\omega(n) = k$  et il y en a  $2^s$ . De plus ils vérifient:

$$n \leq A_k \left( \frac{p_{k+s}}{p_{k-s}} \right)^s.$$

On choisit  $s$  de façon que  $p_{k+s} \leq x + f(x)$  et  $p_{k-s} \geq x - f(x)$  de telle sorte que  $s \sim \frac{f(x)}{\log x}$ . On a alors:

$$\log \frac{n}{A_k} \leq s \log \frac{x + f(x)}{x - f(x)} \sim 2c^2 \log x.$$