

§2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$Q_l(X) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \exp(O(\sqrt{p_k})) \leq k_0 \exp(O(\sqrt{p_{k_0}})) \leq \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

Remarque. On peut conjecturer que $\log Q_l(X) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\log X}$. En effet si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$, le « 2 » venant de la formule de Brun-Titchmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k , on peut assimiler $\log \frac{p_{k+r}}{p_k}$ à $r \frac{\log p_{k+1}}{p_k}$ et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leq p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

$x_i, y_i \in \{0, 1\}$. Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{p_k}$.

§ 2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Minoration : Posons $k = \left[\frac{c \log x}{\log \log x} \right] + 1$ et $A_k = e^{\theta(p_k)} = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$, où $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ est la fonction de Chebichev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}$. Il y en a $\left[\frac{x}{A_k} \right]$ qui sont inférieurs à x . On a (cf. [Land], § 57):

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k / \log^2 p_k) = k(\log k + \log \log k - 1 + o(1)).$$

Il vient en posant $l = \log x$, $l_2 = \log \log x$, $l_3 = \log \log \log x$:

$$k = \frac{cl}{l_2} + O(1)$$

$$\log A_k = cl + c(\log c - 1)(1 + o(1))l/l_2$$

et

$$f_c(x) \geq \left[\frac{x}{A_k} \right] \geq x^{1-c} \exp\left(c(1 - \log c)(1 + o(1)) \frac{\log x}{\log \log x}\right).$$

Majoration : En développant par la formule multinomiale (cf. [Com], t. 1, p. 38 ou [Hal 2], p. 147), on obtient :

$$\left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k \geq k! \sum_{2 \leq p_{i_1} < \dots < p_{i_k} \leq x} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}$$

On a donc, pour $k \in \mathbb{N}$, en désignant par S l'ensemble des nombres sans facteur carrés,

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x, n \in S \\ \omega(n) = k}} 1 \leq \sum_{\substack{n \leq x, n \in S \\ \omega(n) = k}} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k!} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k.$$

Evaluons maintenant le nombre d'entiers $n \leq x$ dont les facteurs premiers sont exactement $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$. On doit avoir

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k} \leq x; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Ce qui entraîne

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq \left[\frac{\log x}{\log 2} \right]; \quad \alpha_j \geq 1.$$

Or le nombre de solutions de cette inéquation est un nombre de combinaisons avec répétition et vaut $\binom{[\log x / \log 2]}{k} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{\log x}{\log 2} \right)^k$.

On a donc

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) = k}} 1 \leq \frac{1}{(k!)^2} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^k \left(\frac{\log x}{\log 2} \right)^k$$

et

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) \geq k}} 1 \leq x \sum_{j \geq k} \frac{\left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \right)^j (\log x / \log 2)^j}{(j!)^2}$$

On utilise la majoration $\sum_{j \geq k} \frac{a^j}{(j!)^2} \leq \frac{a^k}{(k!)^2} \frac{1}{1 - a/(k+1)^2}$ valable pour $a < (k+1)^2$. On sait d'autre part (cf. [Land] § 28) qu'il existe B tel que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq \log \log x + B, \text{ et on choisit:}$$

$$k = \left[\frac{c \log x}{\log \log x} \right] + 1.$$

On obtient alors

$$f_c(x) \leq \frac{x(l_2 + B)^k (l/\log 2)^k}{(k!)^2} \left(1 + O\left(\frac{l_2^3}{l}\right)\right)$$

et en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leq x^{1-c} \exp \left(3c(1+o(1)) \frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x} \right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

§ 3. VALEURS EXTRÊMES DE $f(n) + f(n+1)$

1) *Fonction $\sigma(n)$ = somme des diviseurs de n .*

On remarque d'abord que, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma(n) &= n \prod_{p^a \parallel n} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \\ &= n(1+o(1)) \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p \leq \log n}} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) \end{aligned}$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n / \log \log n$ et:

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p > \log n}} \left(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^a}\right) &\leq \prod_{\substack{p^a \parallel n \\ p > \log n}} \frac{1}{1-1/p} \leq \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log \log n}} \\ &= 1 + \frac{O(1)}{\log \log n} \end{aligned}$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n , $\sigma(n) \geq n$ et pour n pair, $\sigma(n) \geq \frac{3}{2}n$. On a

donc pour tout n : $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geq \frac{5}{2}n$. Inversement, pour k fixé, le

nombre $n = 4p_2 p_3 \dots p_k + 1$ est tel que n et $n+1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1-\varepsilon) \log n$ et donc vérifie: $\sigma(n) + \sigma(n+1)$

$$= \frac{5}{2}n(1+o(1)).$$