

## §4. Nombres -intéressants

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

avec  $a \geq 2$  qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers  $n$  tels que  $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$  est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

§ 4. NOMBRES  $\omega$ -INTÉRESSANTS

*Définition.* On dit que  $n$  est  $\omega$ -intéressant, si l'on a

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Interprétation géométrique: pour  $m > n$ , le point  $(m, \omega(m))$  est situé sous la droite joignant l'origine à  $(n, \omega(n))$ .

*Propriété 1:* Pour  $k \geq 1$ , le nombre  $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_k$  est  $\omega$ -intéressant. En effet: si  $\omega(m) \leq k$  on a bien:  $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$  pour  $m > A_k$ . Et si  $\omega(m) = k + \Delta$ ,  $\Delta > 0$ , on a alors  $m \geq A_k 3^\Delta$  et:

$$\frac{\omega(m)}{m} \leq \frac{k + \Delta}{A_k 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{\left(1 + \frac{\Delta}{k}\right)}{3^\Delta} \leq \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1 + \Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

*Propriété 2:* Soit  $n$  vérifiant:

$$A_k < n < A_{k+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \omega(n) = k$$

alors  $n$  est  $\omega$ -intéressant.

*Démonstration:* Soit  $m > n$ , ou bien on a:  $m \geq A_{k+1}$  et d'après la propriété 1:

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leq \frac{(k+1) \left(1 - \frac{1}{k}\right)}{n} < \frac{\omega(n)}{n}$$

ou bien on a:  $n < m < A_{k+1}$  et cela entraîne  $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$ .

*Propriété 3:* Pour une infinité de valeurs de  $k$ , il existe un nombre  $\omega$ -intéressant, plus grand que  $A_k$  et ayant  $k - 1$  facteurs premiers.

*Démonstration* : Soit  $k$  tel que

$$(3) \quad \frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{1}{k-1};$$

alors  $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-1} (p_k + 1)$  est  $\omega$ -intéressant :

Remarquons d'abord que l'on a  $A_k < n < n' = A_k \frac{p_{k+1}}{p_k}$  et que pour  $k \geq 2$ , d'après la propriété 2,  $n'$  est  $\omega$ -intéressant. Ensuite,  $\omega(n) = k - 1$ ; si  $m$  vérifie  $n < m < n'$  on a :  $\omega(m) \leq k - 1$ ; si  $m$  vérifie  $n' \leq m$ , on a

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n')}{n'} = \frac{k}{n'} < \frac{k-1}{n};$$

d'après l'hypothèse.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers tels que  $p_{k+1} - p_k > 2 \log p_k$  (cf. [Pra], p. 157). Pour ces nombres on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k + 1} > 1 + \frac{2 \log p_k - 1}{p_k + 1}$$

et comme  $p_k \sim k \log k$ , cela entraîne la relation (3).

*Remarque 1.* Si  $k$  vérifie  $p_{k+1} - p_k < \frac{p_k}{k-1}$  il est facile de voir qu'il

n'existe aucun nombre  $\omega$ -intéressant compris entre  $A_k$  et  $n' = A_k \frac{p_{k+1}}{p_k}$ .

Cette situation se produit pour une infinité de  $k$ . On peut donc conjecturer que pour une infinité de  $k$ , les nombres  $\omega$ -intéressants compris entre  $A_k$  et  $A_{k+1}$  vérifient  $\omega(n) \geq k$ .

*Remarque 2.* Désignons par  $n''$  le plus petit entier suivant  $A_k$  et ayant  $(k-1)$  facteurs premiers. On a  $n'' \leq n = A_k \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)$ . Il est possible d'obtenir une meilleure majoration de  $n''$  de la façon suivante : Le théorème de Sylvester-Schur affirme que  $P(u, r)$ , le plus grand facteur premier du produit  $(u+1) \dots (u+r)$  est plus grand que  $r$  si  $u \geq r$ . (cf. [Lan]).

Considérons le produit :  $\prod_{t=1}^{p_{k-2}} (p_{k-1} p_k + t)$ . Il doit avoir un facteur premier  $q > p_{k-2}$ , et soit  $t = t_q$  tel que  $q$  divise  $p_{k-1} p_k + t$ . Alors le nombre  $n = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_{k-2} (p_{k-1} p_k + t_q)$  a  $k-1$  facteurs premiers et l'on a  $n \leq A_k (1 + p_{k-2}/p_k p_{k-1})$ . Le résultat de Ramachandra (cf. [Ramac]) :

si  $r^{3/2} \leq u \leq r^{\log \log r}$ , on a:  $P(u, r) > r^{1+2\lambda}$  avec  $\lambda = -\left(8 + \frac{\log u}{\log r}\right)$

permet de montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $n'' \leq A_k \left(1 + \frac{1}{p_k^{1+\alpha}}\right)$ . On

peut prendre  $\alpha = 0,000974$ .

*Propriété 4.* Soit  $n$  un nombre  $\omega$ -intéressant,  $n \geq (k-1) A_k$  alors  $\omega(n) \geq k$ . Cela entraîne qu'un nombre  $\omega$ -intéressant compris entre  $A_k$  et  $A_{k+1}$  a plus de  $(k-1)$  facteurs premiers.

*Démonstration.* Soit  $n \geq (k-1) A_k$  vérifiant  $\omega(n) \leq k-1$ ; on écrit

$$A_k(t-1) \leq n < A_k t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc  $t \geq k$ . Ce nombre  $n$  ne peut pas être  $\omega$ -intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leq \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leq \frac{k}{A_k t} \leq \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture: Peut-on remplacer  $n \geq (k-1) A_k$  par  $n \geq (1+\varepsilon(k)) A_k$  avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k) = 0$ ?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres  $\omega$ -intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres  $\omega$ -largement composés: Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres  $\omega$ -largement composés non  $\omega$ -intéressants (exemple:  $n = (p_{k+1} - 1) A_k$  par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

### § 5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4

PROPOSITION 3. Posons  $N_k(x) = \text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) > k\}$ . Pour  $\alpha$  fixé,  $\alpha > 1$ , on a lorsque  $x \rightarrow +\infty$  (avec les notations de l'introduction)

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha-1} \alpha^{\frac{1}{2} + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x(1 + O(1/\log \log x))}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}}$$

où  $\{y\}$  désigne la partie fractionnaire de  $y$ .

Pour  $0 < \alpha < 1$ , la formule ci-dessus est valable (en remplaçant  $\frac{F(\alpha)}{\alpha-1}$  par  $\frac{F(\alpha)}{1-\alpha}$ ) pour estimer  $\text{card} \{n \leq x \mid \omega(n) \leq \alpha \log \log x\}$ .