Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1981)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N
Autor: Erdös, Paul / Nicolas, Jean-Louis
Kapitel: §5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51737

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

si $r^{3/2} \leqslant u \leqslant r^{\log \log r}$, on a: $P(u, r) > r^{1+2\lambda}$ avec $\lambda = -\left(8 + \dfrac{\log u}{\log r}\right)$ permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leqslant A_k \left(1 + \dfrac{1}{p_k^{1+\alpha}}\right)$. On peut prendre $\alpha = 0,000974$.

Propriété 4. Soit n un nombre ω-intéressant, $n \geqslant (k-1) A_k$ alors $\omega(n) \geqslant k$. Cela entraine qu'un nombre ω-intéressant compris entre A_k et A_{k+1} a plus de $(k-1)$ facteurs premiers.

Démonstration. Soit $n \geqslant (k-1) A_k$ vérifiant $\omega(n) \leqslant k-1$; on écrit

$$A_k (t-1) \leqslant n < A_k t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geqslant k$. Ce nombre n ne peut pas être ω-intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leqslant \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leqslant \frac{k}{A_k t} \leqslant \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture: Peut-on remplacer $n \geqslant (k-1) A_k$ par $n \geqslant (1+\varepsilon(k)) A_k$ avec $\lim\limits_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω-intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω-largement composés: Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω-largement composés non ω-intéressants (exemple: $n = (p_{k+1} - 1) A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

§ 5. Démonstration du théorème 4

Proposition 3. *Posons* $N_k(x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x \mid \omega(n) > k\}$. *Pour* α *fixé,* $\alpha > 1$, *on a lorsque* $x \to +\infty$ *(avec les notations de l'introduction)*

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \alpha^{\frac{1}{2} + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x\left(1 + O(1/\log \log x)\right)}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}}$$

où $\{y\}$ *désigne la partie fractionnaire de* y.

Pour $0 < \alpha < 1$, *la formule ci-dessus est valable* $\left(\text{en remplaçant } \dfrac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \text{ par } \dfrac{F(\alpha)}{1-\alpha}\right)$ *pour estimer* $\operatorname{card}\{n \leqslant x \mid \omega(n) \leqslant \alpha \log \log x\}$.

Démonstration (communiquée par H. Delange). Soit $P_x(z) = \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)}$. Le théorème des résidus montre que:

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{P_x(z)}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz$$

où γ est un cercle de centre 0 et de rayon $r > 1$. On applique la formule de Selberg (1)

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z\, F(z)\, x (\log x)^{z-1}}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz + R_1(x),$$

avec

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{O\left(x (\log x)^{\mathrm{Re}\, z-2}\right)}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz = O\left(\frac{x (\log x)^{r-2}}{(r-1)\, r^k}\right)$$

On pose $\dfrac{z\, F(z)}{z-1} = G(z)$. G est holomorphe en $z = r$ et l'on écrit

$$G(z) = G(r) + (z-r)\, G'(r) + (z-r)^2 H(z, r),$$

avec $H(r, r) = \dfrac{1}{2} G''(r)$. Par la formule de Taylor, il existe λ, $0 < \lambda < 1$ tel que $H(z, r) = \dfrac{1}{2} G''(\lambda z + (1-\lambda) r)$. La fonction H est donc continue et $H(z, r)$ est bornée uniformément pour $z \in \gamma$, $1 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. On pose $\log \log x = l$. On obtient

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_\gamma \frac{x\, G(z) e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz + R_1(x)$$

$$= \frac{1}{2i\pi \log x} \left(\int_\gamma \frac{x\, G(r)\, e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz + \int_\gamma \frac{x (z-r)\, e^{zl} G'(r)}{z^{k+1}}\, dz \right) + R_1(x) + R_2(x)$$

$$= \frac{x}{\log x} G(r) \frac{l^k}{k!} + \frac{x}{\log x} G'(r) \left(\frac{l^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{r\, l^k}{k!} \right) + R_1(x) + R_2(x).$$

On choisit $r = \dfrac{k}{l}$ de telle sorte que le coefficient de $G'(r)$ s'annule, et on a

$$R_2(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_\gamma \frac{x (z-r)^2 H(z, r)\, e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz.$$

Si l'on pose $z = r\, e^{i\theta}$, on a $|z - r|^2\, |e^{zl}| = 2r^2 (1 - \cos\theta)\, e^{rl \cos\theta}$.

On peut montrer que, lorsque $\alpha \to +\infty$, on a $\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\, e^{\alpha\cos\theta}\, d\theta = O(e^{\alpha}\alpha^{-3/2})$ (cf. par exemple, [Dieu], ch. IV). On en déduit que

$$R_2(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\,\frac{e^{rl}}{l^{3/2}\, r^{k-1/2}}\right)$$

et finalement

$$N_k(x) = \frac{x}{\log x}\, G(r)\,\frac{l^k}{k!} + O\left(\frac{x}{\log x}\,\frac{e^{rl}}{l^{3/2}\, r^{k-1/2}}\right) + O\left(\frac{x\,(\log x)^{r-2}}{(r-1)\, r^k}\right)$$

On pose $k = [\alpha \log\log x], r = \dfrac{k}{l} = \alpha + O\left(\dfrac{1}{\log\log x}\right)$, on a donc $G(r) = G(\alpha)\left(1 + O\left(\dfrac{1}{l}\right)\right)$, on évalue chacun des termes ci-dessus (en particulier $k!$ par la formule de Stirling: $k! \sim k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}$) et on obtient la proposition 3.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, on suit la même méthode, en intégrant sur un cercle de rayon $r = \dfrac{k}{l} < 1$.

PROPOSITION 4. *Soit* $(n_0, A) = 1$, *et* $\alpha > 0$. *Alors on a, avec* $d(n) = \sum_{d \mid n} 1$,

(i) $$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} d(n) \leqslant \frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) + 2\sqrt{x},$$

(ii) $$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x \\ \omega(n) \geqslant \alpha \log\log x}} 1 \leqslant \frac{1}{(\log x)^{\alpha \log 2}}\left(\frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) + 2\sqrt{x}\right)$$

En particulier cette dernière somme est $O\left(\dfrac{x}{A}\,\dfrac{1}{(\log x)^{\alpha\log 2 - 1}}\right)$ *lorsque* $A = O(\sqrt{x})$.

Démonstration. La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i): Les nombres pour lesquels $\omega(n) \geqslant \alpha \log\log x$ vérifient $d(n) \geqslant 2^{\omega(n)}$ soit $d(n) \geqslant (\log x)^{\alpha \log 2}$.

On a

$$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} d(n) \leqslant \sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{n} \\ d \mid n}} 2 \leqslant \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ d \mid n \\ n \leq x}} 1 .$$

Or les nombres n sur lesquels s'effectue cette dernière sommation vérifient $n = n_0 + y A \equiv 0 \bmod d$. Si $(A, d) = 1$, cette congruence a une solution et une seule en y dans chaque intervalle de longueur d. Si $(A, d) \neq 1$, pour que cette congruence ait une solution, on doit avoir $(A, d) \mid n_0$, d'où $(A, n_0) \neq 1$; il n'y a donc pas de solutions. Finalement, il y a au plus une solution dans chaque intervalle de longueur d et la somme est

$$\leqslant \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} 2\left(\frac{x}{Ad} + 1\right) \leqslant 2\sqrt{x} + \frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right).$$

Remarque. Dans le cas $A = 1, \alpha = 2$, on trouve dans l'estimation (ii) le même exposant pour $\log x$ que dans la proposition 3. Ceci est à rapprocher du fait que (cf. [And])

$$\sum_{n \leqslant x;\ \omega(n) \sim 2 \log\log x} d(n) \sim x \log x .$$

Par des méthodes plus compliquées, il est possible d'obtenir pour (ii) une meilleure majoration.

LEMME 2. *Soit $M = (a_{ij})$ une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans un corps K. Soit $\mathscr{P}$ une partie de K et soit L_i le nombre d'éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M qui sont dans $\mathscr{P}$. Alors il y a au moins $n - \sum_{i=1}^{m} L_i$ colonnes de M dont tous les éléments sont dans $K - \mathscr{P}$.*

Démonstration. Soit C_j le nombre d'éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui sont dans $\mathscr{P}$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{i=1}^{m} L_i \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ C_j = 0}} 1 = n - \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ C_j \neq 0}} 1 \geqslant n - \sum_{j=1}^{n} C_j$$
$$= n - \sum_{i=1}^{m} L_i .$$

PROPOSITION 5. *Supposons que pour n assez grand, il existe $k > 0$ et $j < n$ tel que*

i) $k \leqslant \omega(n)$,

ii) $\omega(n) \leqslant j$,

iii) $\omega(n-r) \geqslant j$ pour $r = 1, 2, \ldots, j-1$,

iv) $\omega(n+s) \leqslant k$ pour $s = 1, 2, \ldots, [2 \log n]$.

Alors n est un point d'étranglement pour la fonction $n \mapsto n - \omega(n)$.

Démonstration. Soit $m < n$.

Ou bien on a $m \leqslant n - j$ et d'après ii), $m - \omega(m) < n - j \leqslant n - \omega(n)$, ou bien on a $n = m + r$ avec $1 \leqslant r \leqslant j - 1$ et iii) et ii) donnent

$$m - \omega(m) \leqslant m - j \leqslant m - \omega(n) < n - \omega(n) .$$

Soit maintenant $m > n$.
Ou bien on a $m > n + 2 \log n$ et en remarquant que pour tout entier m, on a $\omega(m) \leqslant \dfrac{\log m}{\log 2} \leqslant \dfrac{3}{2} \log m$, on obtient, pour n assez grand :

$$m - \omega(m) \geqslant m - \frac{3}{2} \log m > n + 2 \log n - \frac{3}{2} \log (n + 2 \log n)$$
$$> n > n - \omega(n) ,$$

par la croissance de la fonction $x \mapsto x - \dfrac{3}{2} \log x$.
Ou bien on a $m \leqslant n + [2 \log n]$ et iv) donne alors

$$\omega(m) \leqslant k \leqslant \omega(n)$$

ce qui entraîne

$$m - \omega(m) > n - \omega(n) .$$

Démonstration du théorème 4. La méthode suivante est celle de [Erd 2]. Pour assurer les hypothèses i) et iii) de la proposition 5, on va demander à n d'être solution du système de congruences

$$\begin{cases} n \equiv 0 & \bmod B_0 \\ n \equiv 1 & \bmod B_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ n \equiv j-1 & \bmod B_{j-1} \end{cases}$$

où B_0 est un produit de k nombres premiers et $B_1, \ldots, B_{j-1}$ des produits de j nombres premiers. On pose

$$A = \prod_{i=0}^{j-1} B_i .$$

D'après le théorème chinois, les solutions de ce système de congruences sont de la forme

$$n = n_0 + y A \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant n_0 < A \quad \text{et} \quad y \in \mathbf{N}.$$

On se donne x assez grand. On choisit

$$k = [3 \log \log x], \quad j = [6 \log \log x].$$

On prend les facteurs premiers de $B_0, \ldots, B_{j-1}$ distincts et compris entre $3 \log x$ et $4 \log x$, ce qui est possible d'après le théorème des nombres premiers. On a donc:

$$\log A \leqslant 6 (\log \log x)^2 \log (4 \log x) = O (\log \log x)^3 .$$

Maintenant, pour $1 \leqslant s \leqslant 2 \log x$, grâce au choix des facteurs premiers de A on a, pour la solution n_0 des congruences

$$(n_0 + s, A) = 1$$

et

$$(n_0, A) = B_0 .$$

Considérons le tableau $(a_{s,y})$, $0 \leqslant s \leqslant 2 \log x$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{A} - 1$ défini par

$$\begin{aligned} a_{s,y} &= \omega (n_0 + s + y A) && \text{si} \quad s \neq 0, \\ &= \omega \left(\frac{n_0 + y A}{B_0} \right) && \text{si} \quad s = 0. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4, la $s^{\text{ième}}$ ligne de ce tableau contient au plus

$$O \left(\frac{x}{A} \frac{1}{(\log x)^{3 \log 2 - 1}} \right)$$

termes supérieures à $3 \log \log x$. D'après le lemme 2, il y a $\frac{x}{A} (1 + o(1))$ colonnes y pour lesquelles

$$\begin{aligned} &\omega (n_0 + s + y A) \leqslant 3 \log \log x && \text{pour} \quad s = 1, \ldots, 2 [\log x], \\ &\omega (n_0 + y A) \leqslant 6 \log \log x && \text{pour} \quad s = 0. \end{aligned}$$

Pour une de ces valeurs de y, $n = n_0 + y A$ vérifie les 4 hypothèses de la proposition 5 et est donc un point d'étranglement de la fonction $n \mapsto n - \omega (n)$.

On peut raisonnablement conjecturer que pour ε assez petit, la fonction $n \mapsto n - d(n)^{\varepsilon}$ a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraisemblable que ce soit encore vrai pour $\varepsilon = 1$. D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que pour $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$, $n - (\omega(n) \log n)^{\omega(n)}$ est négatif, et donc cette fonction n'a qu'un nombre fini de points d'étranglement. On ne peut pas démontrer que $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ n'a pas de points d'étranglement: La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante: Quel est le plus petit t_k tel que $\omega(n+t_k) \geqslant k$. On a évidemment $t_k \leqslant 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$ et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de $n - \omega(n)^{\omega(n)}$.

Il n'est pas difficile de montrer que si n est un point d'étranglement pour la fonction $n - \omega(n)^{\omega(n)}$, alors $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$. Il semble vraisemblable que pour $n > n_0$, il existe $m > n$ avec $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$ et même, $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - e^{(\log n)^{1-\varepsilon}}$, ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout $n > n_0$, existe-t-il un $m > n$ tel que $m - d(m) < n - 2$. On a besoin de $n - 2$, parce que $\min\limits_{m=n+1,n+2} m - d(m) \leqslant n - 2$, mais on ne sait rien à ce sujet.

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme: La démonstration suivante a été proposée par D. Bernardi et W. Narkiewicz.

Soit f additive ayant une suite infinie $n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$ de points d'étranglement et $a < b$. On peut trouver, pour n_k assez grand, dans l'intervalle $\left(\frac{n_k}{b}, \frac{n_k}{a}\right)$ un nombre c, premier à $a\,b$; on aura alors

$$c\,a < n_k < c\,b\,,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et $f(a) < f(b)$.

RÉFÉRENCES

[And] ANDERSON, I. On primitive sequences. *J. London Math. Soc. 42* (1967), 137-148.

[Com] COMTET, L. *Analyse combinatoire.* Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1970.

[Del 1] DELANGE, H. Sur des formules dues à A. Selberg. *Bull. Sci. Math. 83* (1959), 101-111.