Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORÈMES DE GAUSS-BONNET, DE HOPF, ET RÉSIDUS DES CONNEXIONS MÉTRIQUES A SINGULARITÉS

Autor: Lehmann, Daniel

Kapitel: 2. Connexions métriques sur une surface (Rappels)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51739

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. Connexions métriques sur une surface (Rappels)

Soit V une surface différentiable (variété C^∞ de dimension 2), non nécessairement compacte pour le moment, et $g = \langle\, , \rangle$ une métrique riemannienne sur V.

Soit ∇ une *connexion métrique* sur V. Pour tout couple (X, Y) de champ de vecteurs, $\nabla_X Y$ désigne un autre champ de vecteurs

(i) dépendant $\mathscr{C}^\infty(V)$-linéairement de X ($\mathscr{C}^\infty(V)$ désignant l'algèbre des fonctions C^∞ de V dans $\mathbf{R}$),

(ii) dépendant additivement de Y,

(iii) vérifiant, pour toute $u \in \mathscr{C}^\infty(V)$,

$$\nabla_X (uY) = (X.u)\, Y + u\, \nabla_X Y,$$

(iv) respectant la métrique g au sens suivant: pour tous champs de vecteurs, X, Y, Z, on a

$$X\,.\,< Y, Z > \;=\; < \nabla_X Y, Z > \;+\; < Y, \nabla_X Z > .$$

On sait qu'il existe toujours de telles connexions métriques, par exemple celle de Levi-Civita caractérisée par la formule supplémentaire

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,.$$

Mais nous ne nous limiterons pas à celle-ci.

Si U désigne un ouvert parallélisable de V (c'est-à-dire dont le module des champs de vecteurs est libre) et si (A, B) désigne un champ de repères *orhtonormés* sur U, l'expression

$$\Omega(X, Y) = < \nabla_X \nabla_Y B - \nabla_Y \nabla_X B - \nabla_{[X, Y]} B, A >$$

ne dépend que de l'orientation du champ de repères (A, B) mais non à proprement parler de A et B, et dépend $\mathscr{C}^\infty(V)$-bilinéairement de X et Y: c'est donc une 2-forme sur U, que l'on peut définir sur la surface V toute entière si celle-ci est orientable, et qu'on appelle *2-forme de courbure* (si on change l'orientation de U, Ω est changée en $-\Omega$). [Rappelons, lorsque ∇ est la connexion de Levi-Civita, que la courbure représente l'obstruction à l'existence d'une isométrie locale avec le plan euclidien.]

Soit $s \to \gamma(s)$ un arc de courbe différentiable sur V, supposé paramétré par l'abscisse curviligne s; le champ des vecteurs tangents $\tau = \dfrac{d\gamma}{ds}$ est donc

partout de longueur 1: on déduit de (iv) que $\nabla_\tau \tau$ est normal à τ en tout point de γ. Supposons alors le support de γ inclus dans un ouvert orientable U de V et soit $v(s)$ le vecteur tangent à V en $\gamma(s)$ déduit de $\tau(s)$ par rotation de $+\pi/2$ (une orientation de U ayant été choisie). Il existe donc une fonction différentiable $s \to \rho_g(s)$ telle que

$$\nabla_\tau \tau = \rho_g v :$$

c'est cette fonction que nous appellerons la *courbure géodésique de* γ (elle dépend de l'orientation de γ et de l'orientation de U).

Calculs locaux. Soit U un ouvert parallélisable de V, et (A, B) un champ de repères orthonormés sur U: Les formules (i), (ii), (iii), (iv) prouvent l'existence d'une 1-forme $\omega_{(A,B)}$ sur U telle que

$$\begin{cases} \nabla_Y B = +\omega_{(A,B)}(Y) A \\ \nabla_Y A = -\omega_{(A,B)}(Y) B \end{cases}$$

pour tout champ de vecteurs Y sur U. (On notera en abrégé: $\nabla B = +\omega A$, $\nabla A = -\omega B$). Si (A', B') est un autre champ de repères orthonormés sur U déduit de (A, B) par rotation θ ($A' = \cos\theta.A + \sin\theta.B$, $B' = -\sin\theta.A + \cos\theta.B$), où $\theta : U \to R/2\pi Z$ est une fonction différentiable, on vérifie aisément que

$$(v) \qquad \omega_{(A',B')} = \omega_{(A,B)} - d\theta$$

ATTENTION: malgré la notation, la 1-forme fermée $d\theta$ peut ne pas être un cobord si U n'est pas simplement connexe; la fonction θ prend en effet ses valeurs dans $\mathbf{R}/2\pi\, Z$, et non dans $\mathbf{R}$).

Si on oriente U en décrétant le champ de repères (A, B) direct, la 2-forme de courbure est donnée par

$$(vi) \qquad \Omega = d\omega_{(A,B)}$$

Enfin, si γ est une courbe orientée dans U, et si l'angle polaire $(A_{\gamma(s)}, \tau(s))$ de son vecteur tangent unitaire $\tau(s)$ est égal à $\varphi(s)$

$$(\tau = \cos\varphi\, A + \sin\varphi\, B),$$

on vérifie aisément:

$$(vii) \qquad \rho_g(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds} - \omega(\tau).$$