4. Théorème des résidus

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\left(-\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i},\ -\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right) = \left(\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i},\ \left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right):$$

dans le groupe des angles, l'angle est changé en son opposé, mais la mesure des angles dépendant de l'orientation de $T_{M_i}(V)$ et celle-ci étant changée,

α_i = mesure par rapport à l'ancienne orientation (comprise entre $-\pi$ et $+\pi$) de l'angle

$$\left(\left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i},\ \left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i}\right)$$

= mesure par rapport à la nouvelle orientation de

$$\left(\left(\frac{d\gamma_{i+1}}{ds}\right)_{M_i},\ \left(\frac{d\gamma_i}{ds}\right)_{M_i}\right).$$

Donc α_i ne change pas.

Ceci achève la démonstration de la partie (i) du théorème.

Si l'intérieur de P est tout entier inclus dans U, la formule de Green-Riemann s'écrit:

$$\int_{\partial P} \omega = \iint_P d\omega = \iint_P \Omega,$$

d'où le corollaire.

Remarque. Si on change l'orientation de U, on change celle de P, et Ω est changé en $-\Omega$, de sorte que $\iint_{P^-}(-\Omega) = \iint_P \Omega$ ne change pas.

4. Théorème des résidus

Supposons désormais la surface V *compacte* (non nécessairement orientable), et soit $U = V - \mathscr{S}$ un ouvert de V. On munit U d'une métrique riemannienne g, et d'une connexion ∇ respectant cette métrique.

On supposera en outre qu'il existe un pavage différentiable $(P_1, \ldots, P_F)$ de V ayant les propriétés suivantes:

(i) chaque pavé P_λ est inclus dans un ouvert parallélisable U_λ de V,

(ii) $\mathscr{S} = \coprod_{\lambda=1}^{F} \mathscr{S}_\lambda$ où $\mathscr{S}_\lambda$ est un fermé de V (éventuellement vide) inclus dans l'intérieur du pavé P_λ.

Notons F, S et A le nombre de faces, sommets et arêtes de ce pavage.

On a alors le

THÉORÈME 2 *(théorème des résidus).*

$$\sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = F + S - A .$$

Démonstration. La définition du résidu s'écrit encore, en posant $\beta_i = \pi - \alpha_i$ et en notant n_λ le nombre de sommets (ou d'arêtes) du λ-ième pavé P_λ:

$$2\pi \text{ Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi + \sum_{P_\lambda} \beta_i - (n_\lambda \pi) - \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds .$$

Sommant toutes ces égalités terme à terme quand λ varie de 1 à F, on obtient:

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi F + \sum_{\lambda} \Big(\sum_{P_\lambda} \beta_i\Big) - \Big(\sum_{\lambda} n_\lambda\Big) \pi - \sum_{\lambda} \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds .$$

Mais $\sum_{\lambda} \big(\sum_{P_\lambda} \beta_i\big) = 2\pi S$

$\sum_{\lambda} n_\lambda = 2A$ (puisque chaque arête est commune à 2 pavés),

et

$\sum_{\lambda} \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds = 0$ (puisque les intégrales se détruisent 2 à 2, chaque arête étant commune à 2 pavés)

d'où

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi (F + S - A)$$

C.Q.F.D.

5. CONNEXIONS MÉTRIQUES SANS SINGULARITÉS

Si $\mathscr{S}_\lambda = \varnothing$, $\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_{P_\lambda} \Omega$ d'après la formule locale de Gauss-Bonnet. Le théorème des résidus devient donc le

THÉORÈME 3 *(formule globale de Gauss-Bonnet).* Pour toute connexion ∇ sans singularité sur une surface compacte V, respectant une métrique riemannienne g, et pour tout pavage $(P_1, ..., P_F)$ de V, on a:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = F + S - A .$$