

# 5. Connexions métriques sans singularités

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉORÈME 2 (*théorème des résidus*).

$$\sum_{\lambda=1}^F \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = F + S - A.$$

*Démonstration.* La définition du résidu s'écrit encore, en posant  $\beta_i = \pi - \alpha_i$  et en notant  $n_\lambda$  le nombre de sommets (ou d'arêtes) du  $\lambda$ -ième pavé  $P_\lambda$ :

$$2\pi \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi + \sum_{P_\lambda} \beta_i - (n_\lambda \pi) - \int_{\partial P_\lambda} \rho_g ds.$$

Sommant toutes ces égalités terme à terme quand  $\lambda$  varie de 1 à  $F$ , on obtient:

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^F \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi F + \sum_{\lambda} \left( \sum_{P_\lambda} \beta_i \right) - \left( \sum_{\lambda} n_\lambda \right) \pi - \sum_{\lambda} \int_{\partial P_\lambda} \rho_g ds.$$

$$\text{Mais } \sum_{\lambda} \left( \sum_{P_\lambda} \beta_i \right) = 2\pi S$$

$$\sum_{\lambda} n_\lambda = 2A \quad (\text{puisque chaque arête est commune à 2 pavés}),$$

et

$$\sum_{\lambda} \int_{\partial P_\lambda} \rho_g ds = 0 \quad (\text{puisque les intégrales se détruisent 2 à 2, chaque arête étant commune à 2 pavés})$$

d'où

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^F \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi(F + S - A)$$

C.Q.F.D.

## 5. CONNEXIONS MÉTRIQUES SANS SINGULARITÉS

Si  $\mathcal{S}_\lambda = \emptyset$ ,  $\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \frac{1}{2\pi} \iint_{P_\lambda} \Omega$  d'après la formule locale de Gauss-Bonnet. Le théorème des résidus devient donc le

THÉORÈME 3 (*formule globale de Gauss-Bonnet*). Pour toute connexion  $\nabla$  sans singularité sur une surface compacte  $V$ , respectant une métrique riemannienne  $g$ , et pour tout pavage  $(P_1, \dots, P_F)$  de  $V$ , on a:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = F + S - A.$$

*Remarque.* La 2-forme de courbure  $\Omega$  n'est définie que si  $V$  est orientée. Cependant si  $V$  n'est pas orientée ni même orientable, on peut encore définir globalement l'expression  $\iint_V \Omega$  comme étant égale à  $\sum_{\lambda=1}^F \iint_{P_\lambda} \Omega$  (voir remarque finale du § 3).

On déduit aisément du théorème 3 le

#### COROLLAIRE

- (i)  $\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega \in \mathbf{Z}$ ,
- (ii)  $\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega$  ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne  $g$  et de la connexion  $\nabla$  sans singularité respectant cette métrique,
- (iii)  $F + S - A$  ne dépend pas du pavage  $(P_1, \dots, P_F)$ ; ce nombre est un invariant topologique de  $V$  (appelé *invariant d'Euler-Poincaré*, noté  $\chi_V$  dans la suite).

La 2-forme de courbure est en fait ce qu'on appelle une 2-forme « tordue » ou « impaire » (cf. de Rham [2]).

*Remarque.* Un cas particulier classique de la formule globale de Gauss-Bonnet consiste à supposer la métrique  $g$  définie par une immersion  $\iota$  de  $V$  dans l'espace  $\mathbf{E}^3$ , et à prendre pour  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita de  $g$ :

si  $V$  est orientée,  $\iota$  permet de définir une « application de Gauss »  $\tilde{\iota}: V \rightarrow S^2$  de  $V$  dans la sphère  $S^2$  en associant, à tout point  $x$  de  $V$ , la classe d'équivalence du vecteur normal unitaire  $N_x$  en  $x$  à  $\iota(V)$ . La « courbure totale »

$$\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega$$

devient alors égale au « degré de l'immersion  $\iota$  » défini par

$$2 \frac{\iint_V \tilde{\iota}^* \sigma_0}{\iint_{S^2} \sigma_0} \quad (\text{où } \sigma_0 \text{ désigne la 2-forme surface de } S^2).$$