5. Connexions métriques sans singularités

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

THÉORÈME 2 *(théorème des résidus).*

$$\sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = F + S - A .$$

Démonstration. La définition du résidu s'écrit encore, en posant $\beta_i = \pi - \alpha_i$ et en notant n_λ le nombre de sommets (ou d'arêtes) du λ-ième pavé P_λ:

$$2\pi \text{ Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi + \sum_{P_\lambda} \beta_i - (n_\lambda \pi) - \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds .$$

Sommant toutes ces égalités terme à terme quand λ varie de 1 à F, on obtient:

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi F + \sum_{\lambda} \left(\sum_{P_\lambda} \beta_i\right) - \left(\sum_{\lambda} n_\lambda\right) \pi - \sum_{\lambda} \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds .$$

Mais $\sum_{\lambda} \left(\sum_{P_\lambda} \beta_i\right) = 2\pi S$

$\sum_{\lambda} n_\lambda = 2A$ (puisque chaque arête est commune à 2 pavés),

et

$\sum_{\lambda} \int_{\partial P_\lambda} \rho_g \, ds = 0$ (puisque les intégrales se détruisent 2 à 2, chaque arête étant commune à 2 pavés)

d'où

$$2\pi \sum_{\lambda=1}^{F} \text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = 2\pi (F + S - A)$$

C.Q.F.D.

5. Connexions métriques sans singularités

Si $\mathcal{S}_\lambda = \varnothing$, $\text{Rés}_{P_\lambda}(\nabla, g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_{P_\lambda} \Omega$ d'après la formule locale de Gauss-Bonnet. Le théorème des résidus devient donc le

THÉORÈME 3 *(formule globale de Gauss-Bonnet).* Pour toute connexion ∇ sans singularité sur une surface compacte V, respectant une métrique riemannienne g, et pour tout pavage $(P_1, \ldots, P_F)$ de V, on a:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = F + S - A .$$

Remarque. La 2-forme de courbure Ω n'est définie que si V est orientée. Cependant si V n'est pas orientée ni même orientable, on peut encore définir globalement l'expression $\iint_V \Omega$ comme étant égale à $\sum_{\lambda=1}^{F} \iint_{P_\lambda} \Omega$ (voir remarque finale du § 3).

On déduit aisément du théorème 3 le

COROLLAIRE

(i) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega \in \mathbf{Z}$,

(ii) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega$ ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne g et de la connexion ∇ sans singularité respectant cette métrique,

(iii) $F + S - A$ ne dépend pas du pavage $(P_1, \ldots, P_F)$; ce nombre est un invariant topologique de V (appelé *invariant d'Euler-Poincaré*, noté χ_V dans la suite).

La 2-forme de courbure est en fait ce qu'on appelle une 2-forme « tordue » ou « impaire » (cf. de Rham [2]).

Remarque. Un cas particulier classique de la formule globale de Gauss-Bonnet consiste à supposer la métrique g définie par une immersion $\imath$ de V dans l'espace $\mathbf{E}^3$, et à prendre pour ∇ la connexion de Levi-Civita de g: si V est orientée, $\imath$ permet de définir une « application de Gauss » $\tilde{\imath} : V \to S^2$ de V dans la sphère S^2 en associant, à tout point x de V, la classe d'équipollence du vecteur normal unitaire N_x en x à $\imath(V)$. La « courbure totale » $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\iint_V \Omega$ devient alors égale au « degré de l'immersion $\imath$ » défini par

$$2 \frac{\displaystyle\iint_V \tilde{\imath}^* \sigma_0}{\displaystyle\iint_{S^2} \sigma_0}$$ (où σ_0 désigne la 2-forme surface de S^2).