3. Die Nicht-Charakterisierbarkeit

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Die Formel σ muß also in S ausdrücken, daß $\langle x_1, x_2\rangle$ und $\langle y_1, y_2\rangle$ die f-Bilder der affinen Koordinaten $\langle r_1, r_2\rangle$ und $\langle s_1, s_2\rangle$ eines Punktes aus S sind. Dabei genügt es natürlich, wenn

$$\langle x_1, x_2 \rangle \approx \langle f(r_1), f(r_2)\rangle \text{ und } \langle y_1, y_2 \rangle \approx \langle f(s_1), f(s_2)\rangle$$

gilt, wobei $\approx$ die analog zu $\sim$ mit $\oplus$ in $[e_0, e_\infty\rangle$ gebildete Äquivalenzrelation ist. Nach Szczerba-Tarski [S-T$_2$], §5 läßt sich eine Formel $K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$ angeben, die für $z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ gerade besagt, daß

$$(f(z'), f(z'')) = (\langle x_1, x_2\rangle/\approx, \langle y_1, y_2\rangle/\approx)$$

ist. Wir können also

$$\sigma(x_1, x_2; y_1, y_2) :\equiv \exists\, z\, K_5(z; x_1, x_2; y_1, y_2)$$

setzen.

Nach diesen Ausführungen dürfte klar sein, daß die folgende Übersetzungsvorschrift für die Formeln α und β einen geometrisch definierten Schnitt auf $[e_0, e_1]$ liefert, dessen Realisierung in S eine Realisierung des ursprünglichen Schnittes auf $[0, 1]$ nach sich zieht:

(1) ersetze in α und β Quantifikationen $\forall\, x\, \rho$ bzw. $\exists\, x\, \rho$ durch $\forall\, x\,(B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \Rightarrow \rho)$ bzw. $\exists\, x\,(B(e_0 x e_\infty) \wedge x \neq e_\infty \wedge \rho)$,

(2) ersetze die Teilformeln $u + v = w$ und $u \cdot v = w$ durch $u \oplus v = w$ bzw. $u \odot v = w$,

(3) ersetze die Teilformeln $S(\langle u_1, u_2\rangle, \langle v_1, v_2\rangle)$ durch $\sigma(u_1, u_2; v_1, v_2)$,

(4) ersetze Parameter r durch $f(r)$.

3. Die Nicht-Charakterisierbarkeit

Wir wollen nun den im 1. Abschnitt formulierten Nicht-Charakterisierbarkeitssatz beweisen, indem wir ihn auf ein Resultat von R. Montague in [M] zurückführen.

Dazu betrachten wir zuerst einen reell abgeschlossenen Körper R mit einer Teilmenge N, die die folgenden Bedingungen erfüllen soll:

(a) $O \in N$ und $r \in N \Rightarrow r + 1 \in N$

(b) $r, s \in N, r < s \quad \Rightarrow r + 1 \leqslant s$

(c) $(\forall r \in R, r \geqslant O)(\exists t \in N)\, t \leqslant r < t + 1$

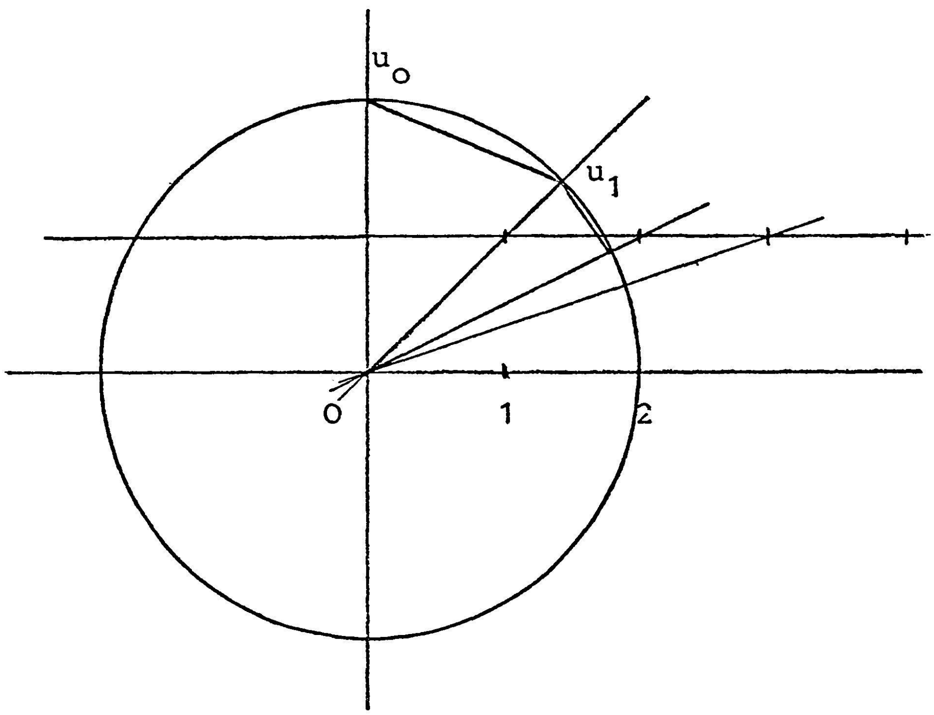
Die Menge N enthält dann alle natürlichen Zahlen, ist jedoch, falls R nicht-archimedisch ist, nicht eindeutig festgelegt. Mit Hilfe von N definieren wir die folgende Teilmenge S_N^R von R^2:

$$(x', x'') \in S_N^R :\Leftrightarrow [(x' \leqslant O \vee x'' \leqslant O) \wedge x'^2 + x''^2 < 4] \vee$$
$$\left[O < x', x'' \wedge (\exists t \in N)\, t \leqslant \frac{x'}{x''} < t+1 \wedge (x', x'') \in \Delta_t\right],$$

wobei Δ_t das Innere des Dreieckes mit den Eckpunkten $(0, 0) = 0$,

$$\left(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\right) = u_t, \left(\frac{2(t+1)}{\sqrt{1+(t+1)^2}}, \frac{2}{\sqrt{1+(t+1)^2}}\right) = u_{t+1},$$

mit Einschluß der offenen Strecke von 0 nach u_t bezeichnet.



Wegen (a)-(c) ist S_N^R offensichtlich konvex und offen.

LEMMA. *Es sei R reell abgeschlossen und $N \subset R$ erfülle* (a)-(c). *Dann ist S_N^R genau dann ein Modell von GA_2, falls in R jeder N-definierbare Schnitt realisiert ist.*[1])

Beweis. Dieses Lemma folgt unmittelbar aus dem Charakterisierungslemma, wenn man beachtet daß nicht nur S_N^R mit Hilfe von N, sondern

[1]) Dies ist analog zu S-definierbar zu verstehen, d.h. jetzt darf in den definierenden arithmetischen Formeln α und β ein zusätzliches 1-stelliges Prädikat für N benützt werden.

auch umgekehrt N mit Hilfe von S_N^R definiert werden kann. Es gilt nämlich für $t \in R$, $0 < t$

$$t \in N \Leftrightarrow (\forall 0 < r < 4)(\exists s)\left[s^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 = r \wedge \left(s, \frac{s}{t}\right) \in S_N^R\right],$$

d.h. die Gerade durch $(0, 0)$ und $(t, 1)$ reicht in S_N^R bis zum Rand des Kreises mit dem Radius 2. q.e.d.

Wir können jetzt den Satz beweisen: Angenommen, es gäbe eine Aussage ρ der Sprache der angeordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat für S, so daß für $S \subset R^2$ mit S konvex und offen und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt. Für jedes $N \subset R$, das (a)-(c) erfüllt, heißt dies speziell

$$S_N^R \text{ Modell von } GA_2 \Leftrightarrow \text{in } (R, N) \text{ gilt } \rho^*,$$

wobei man ρ^* aus ρ erhält, indem man die Definition von S_N^R in ρ für das Prädikat S einsetzt. ρ^* hat jetzt das zusätzliche Prädikat N. Mit dem letzten Lemma erhalten wir dann:

> Ist R reell abgeschlossen und hat $N \subset R$
> die Eigenschaften (a)-(c), so ist genau dann
> in R jeder N-definierbare Schnitt realisiert,
> falls in (R, N) die einzelne Aussage ρ^* gilt.

Dies widerspricht jedoch Theorem 8 zusammen mit Theorem 6 in [M]. Montague zeigt nämlich dort in Theorem 6, daß die Theorie der reell abgeschlossenen Körper R mit Teilprädikat N mit (a)-(c), in dem jeder N-definierbare Schnitt realisiert ist, „strongly semantically closed“ ist. Nach Theorem 8 impliziert dies, daß das Schema der „reellen Abgeschlossenheit“ zusammen mit endlich vielen anderen Aussagen (z.B. (a)-(c) und ρ^*) nicht ausreicht, diese Theorie zu axiomatisieren.

4. Schlussbemerkungen

1. Der eben bewiesene Satz läßt sich verschärfen zu

SATZ'. *Es gibt keine Aussage ρ der schwachen 2. Stufe für angeordnete Körper mit zusätzlichem 2-stelligen Prädikat S, so dass für konvexe offene Teilmengen $S \subset R^2$ und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt.*