4. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

auch umgekehrt N mit Hilfe von S_N^R definiert werden kann. Es gilt nämlich für $t \in R$, $0 < t$

$$t \in N \Leftrightarrow (\forall 0 < r < 4)(\exists s)\left[s^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 = r \wedge \left(s, \frac{s}{t}\right) \in S_N^R\right],$$

d.h. die Gerade durch $(0, 0)$ und $(t, 1)$ reicht in S_N^R bis zum Rand des Kreises mit dem Radius 2. q.e.d.

Wir können jetzt den Satz beweisen: Angenommen, es gäbe eine Aussage ρ der Sprache der angeordneten Körper mit einem zusätzlichen 2-stelligen Prädikat für S, so daß für $S \subset R^2$ mit S konvex und offen und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt. Für jedes $N \subset R$, das (a)-(c) erfüllt, heißt dies speziell

$$S_N^R \text{ Modell von } GA_2 \Leftrightarrow \text{in } (R, N) \text{ gilt } \rho^*,$$

wobei man ρ^* aus ρ erhält, indem man die Definition von S_N^R in ρ für das Prädikat S einsetzt. ρ^* hat jetzt das zusätzliche Prädikat N. Mit dem letzten Lemma erhalten wir dann:

> Ist R reell abgeschlossen und hat $N \subset R$
> die Eigenschaften (a)-(c), so ist genau dann
> in R jeder N-definierbare Schnitt realisiert,
> falls in (R, N) die einzelne Aussage ρ^* gilt.

Dies widerspricht jedoch Theorem 8 zusammen mit Theorem 6 in [M]. Montague zeigt nämlich dort in Theorem 6, daß die Theorie der reell abgeschlossenen Körper R mit Teilprädikat N mit (a)-(c), in dem jeder N-definierbare Schnitt realisiert ist, „strongly semantically closed" ist. Nach Theorem 8 impliziert dies, daß das Schema der „reellen Abgeschlossenheit" zusammen mit endlich vielen anderen Aussagen (z.B. (a)-(c) und ρ^*) nicht ausreicht, diese Theorie zu axiomatisieren.

4. Schlussbemerkungen

1. Der eben bewiesene Satz läßt sich verschärfen zu

Satz'. *Es gibt keine Aussage ρ der schwachen 2. Stufe für angeordnete Körper mit zusätzlichem 2-stelligen Prädikat S, so dass für konvexe offene Teilmengen $S \subset R^2$ und R reell abgeschlossen S genau dann ein Modell von GA_2 ist, falls ρ in (R, S) gilt.*

Dabei meint „schwache 2. Stufe", daß auch Quantifikationen über endliche Folgen von Körperelementen zugelassen sind.

Wir skizzieren den Beweis: Falls es eine solche Aussage ρ gäbe, so würde ρ insbesondere in $(\mathbf{R}, S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}})$ gelten. Ersetzen wir $S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}}$ in ρ durch seine Definition, so erhalten wir eine Aussage ρ^* der schwachen 2. Stufe, die in $(\mathbf{R}, \mathbf{N})$ gelten würde. Aus Lemma 1 und 2 bei Apt in [A] läßt sich nun (mit einigem technischen Aufwand) folgern, daß es eine Zahl $n \geqslant 2$ gibt, so daß die durch Δ_n^1-Folgen definierten reellen Zahlen einen reell abgeschlossenen Teilkörper R_n von $\mathbf{R}$ bilden, in dem einerseits ρ^* gelten würde, der aber andererseits nicht alle $\mathbf{N}$-definierbaren Schnitte realisiert. Damit müßte einerseits ρ in $(R_n, S_{\mathbf{N}}^{R_n})$ gelten, andererseits ist aber $S_{\mathbf{N}}^{R_n}$ nach dem Lemma im 3. Abschnitt kein Modell von GA_2.

Es sei noch bemerkt, daß die Lemmata 1 und 2 bei Apt unter der Voraussetzung $V = L$ bewiesen werden. Der Satz' behält dann jedoch auch ohne diese Voraussetzung seine Gültigkeit.

2. Die Menge $S_{\mathbf{N}}^{\mathbf{R}}$ wurde schon von Szczerba und Tarski benützt, um die Unentscheidbarkeit von GA_2 zu beweisen. Weiterhin wurde dieses Modell in Prestel-Szczerba [P-S] benützt, um zu zeigen, daß die Menge derjenigen Aussagen, die in allen Modellen von GA_2 über $\mathbf{R}$ gelten (d.h. in denen das Stetigkeitsaxiom C^2 der 2. Stufe gilt) nicht rekursive axiomatisiert werden kann (also insbesondere größer als die Theorie GA_2 ist). Dies heißt insbesondere, daß das „Elementarisierungsverfahren" hier zu einer echt schwächeren Theorie führen muß. Schließlich wurde von Schwabhäuser in [Sch] für archimedisch geordnete, reell abgeschlossene Körper R eine Charakterisierung derjenigen $S_{\mathbf{N}}^{R}$ angekündigt, die Modelle von GA_2 sind. Diese Charakterisierung folgt ebenfalls aus dem Lemma im 3. Abschnitt.

3. Es bleibt eine Frage aus [S-T$_1$] ungelöst, nämlich, ob GA_2 eine endlich axiomatisierbare Obertheorie besitzt.

4. Bei R. Fritsch und U. Friedrichsdorf möchte ich mich für viele informative und anregende Gespräche zu dem Thema dieser Arbeit bedanken.

LITERATUR

[A] Apt, K. R. Non-finite axiomatizability of the second order arithmetic. *Bull. Acad. Polon. Sci. 20* (1972), 347-348.

[C] Coxeter, H. S. M. *Non-Euclidean geometry.* Toronto 1942.

[H] Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig 1913.

[K] Klingenberg, W. *Grundlagen der Geometrie.* Mannheim 1971.