

6. Proof of (4)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6. PROOF OF (4)

For characters ψ_1, \dots, ψ_m on $GF(q)$, define the Jacobi sum

$$J(\psi_1, \dots, \psi_m) = (-1)^{m+1} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_m \in GF(q) \\ x_1 + \dots + x_m = 1}} \psi_1(x_1) \dots \psi_m(x_m).$$

We will use the well-known fact that if $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_m$ is nontrivial, then

$$(18) \quad J(\psi_1, \dots, \psi_m) = G(\psi_1 \dots \psi_m)^{-1} \prod_{i=1}^m G(\psi_i).$$

Let S denote the left side of (4). If χ_1, χ_2 , or χ_3^2 is trivial, then it is easy to verify (4) directly, with use of (18) and (26) below. Thus assume that χ_1, χ_2 , and χ_3^2 are nontrivial. With the change of variables

$$u = xy, \quad v = x + y,$$

we have

$$S = \sum_{u, v \in GF(q)} \chi_1(u) \chi_2(1+u-v) \chi_3(v^2-4u) \{1 + \phi(v^2-4u)\}.$$

It therefore remains to show that

$$(19) \quad S_1 = \sum_{u, v} \chi_1(u) \chi_2(1+u-v) \chi_3(v^2-4u) = R(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \phi).$$

Replace v by $u + 1 - v$ to get

$$(20) \quad S_1 = \sum_{u, v} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(1+u^2+v^2-2u-2v-2uv).$$

Replace u by u/t , and v by v/t , to get

$$(21) \quad \begin{aligned} S_2 &= -S_1 G(\chi_1 \chi_2 \chi_3^2) \\ &= \sum_{t \neq 0} \sum_{u, v} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(t^2+u^2+v^2-2ut-2vt-2uv) \zeta^{T(t)}. \end{aligned}$$

Since $\chi_1 \chi_2 \chi_3^2$ is nontrivial, the restriction $t \neq 0$ may be dropped. Then replace t by $t + u + v$ to get

$$S_2 = \sum_{t, u, v} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(t^2-4uv) \zeta^{T(t+u+v)}.$$

Replace u by ua and v by vb to get

$$(22) \quad \begin{aligned} S_3 &= S_2 \overline{G(\chi_1)} \overline{G(\chi_2)} \\ &= \sum_t \sum_{a, b, u, v \neq 0} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(t^2-4uvab) \zeta^{T(t+a(u-1)+b(v-1))}. \end{aligned}$$

Replace a by $a/(4uvb)$ to get

$$S_3 = \sum_t \sum_{a, b, u, v \neq 0} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(t^2 - a) \zeta^{T(t+b(v-1) + \frac{a(u-1)}{4uvb})}$$

Since χ_1 is nontrivial, the restriction $a \neq 0$ may be dropped. Then replace a by $t^2 - a$ to get

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{a, t} \sum_{b, u, v \neq 0} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3(a) \zeta^{T(t+b(v-1) + \frac{(1-u)(a-t^2)}{4uvb})} \\ &= -G(\chi_3) \sum_{u \neq 0, 1} \sum_{b, v \neq 0} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3\left(\frac{4uvb}{1-u}\right) \zeta^{T(b(v-1))} \sum_t \zeta^{T(t + \frac{t^2(u-1)}{4uvb})} \end{aligned}$$

The inner sum on t equals $-\zeta^{T(\frac{uvb}{1-u})} \phi\left(\frac{4uvb}{u-1}\right) G(\phi)$.

Hence

$$\begin{aligned} (23) \quad S_4 &= S_3 (G(\chi_3) G(\phi) \chi_3(-1))^{-1} \\ &= \sum_{u \neq 0, 1} \sum_{b, v \neq 0} \chi_1(u) \chi_2(v) \chi_3 \phi\left(\frac{4uvb}{u-1}\right) \zeta^{T(b(v-1) + \frac{uvb}{1-u})} \end{aligned}$$

Therefore,

$$S_4 = \sum_{u \neq 0, 1} \sum_{v \neq 0} \chi_1 \chi_3 \phi(u) \chi_2 \chi_3 \phi(v) \bar{\chi}_3 \phi\left(\frac{u-1}{4}\right) \sum_b \chi_3 \phi(b) \zeta^{T(b(v-1) + \frac{buv}{1-u})}$$

Since χ_2 and $\chi_3 \phi$ are nontrivial,

$$S_4 = -G(\chi_3 \phi) \sum_{u, v} \chi_1 \chi_3 \phi(u) \chi_2 \chi_3 \phi(v) \bar{\chi}_3 \phi\left(\frac{1-u-v}{4}\right),$$

so

$$(24) \quad S_4 = -\chi_3(4) G(\chi_3 \phi) J(\chi_1 \chi_3 \phi, \chi_2 \chi_3 \phi, \bar{\chi}_3 \phi)$$

Combining (21)-(24), we get

$$(25) \quad S_1 = \frac{\chi_3(-4) G(\chi_3) G(\phi) G(\chi_3 \phi) J(\chi_1 \chi_3 \phi, \chi_2 \chi_3 \phi, \bar{\chi}_3 \phi)}{G(\chi_1 \chi_2 \chi_3^2) G(\chi_1) G(\chi_2)}$$

Applying (7) with $l = 2$, we find that for any character χ_3 ,

$$(26) \quad \chi_3(-4) G(\chi_3) G(\phi) G(\chi_3 \phi) = \chi_3 \phi(-1) q G(\chi_3^2)$$

Since χ_1 and χ_2 are nontrivial, it follows from (25) and (26) that

$$(27) \quad S_1 = \frac{\chi_3 \phi(-1) G(\chi_3^2) G(\chi_1) G(\chi_2) J(\chi_1 \chi_3 \phi, \chi_2 \chi_3 \phi, \bar{\chi}_3 \phi)}{q G(\chi_1 \chi_2 \chi_3^2)}$$

Since $\chi_1\chi_2\chi_3\phi$ and $\chi_3\phi$ are nontrivial, (19) now follows from (18) and (27).

Remark. We evaluated S (the left side of (4)) only under the assumption that $\chi_1\chi_2\chi_3^2$ and $(\chi_1\chi_2\chi_3)^2$ were nontrivial. We now indicate how S can be simply evaluated in terms of Gauss sums when this assumption is dropped. If χ_1, χ_2 , or χ_3^2 is trivial, one can easily evaluate S directly from its definition. If $\chi_1\chi_2\chi_3^2$ is trivial, then one can evaluate S_1 (and hence S) from (20), by first replacing u by u^{-1} , then replacing v by vu^{-1} , to obtain

$$S_1 = \sum_{u,v} \bar{\chi}_1\bar{\chi}_2\bar{\chi}_3^2(u) \chi_3(1+u^2+v^2-2u-2v-2uv) \chi_2(v).$$

Finally, suppose that χ_1, χ_2, χ_3^2 , and $\chi_1\chi_2\chi_3^2$ are nontrivial. Then S_1 can be evaluated from (27).

7. PROOF OF (5)

Let E denote the left side of (5). Since $\chi_1\chi_2$ is nontrivial,

$$E + 1 + \chi_1\chi_2(-1) = \sum_{\substack{x,y \neq 0 \\ x+y \neq -1}} \chi_1\chi_3\left(\frac{1+x}{y}\right) \chi_2\chi_3\left(\frac{1+y}{x}\right) \chi_1\chi_2(y-x).$$

Set $t = \frac{1+x}{y}, \quad u = \frac{1+y}{x},$ so

$$x = \frac{t+1}{ut-1}, \quad y = \frac{u+1}{ut-1}.$$

Then

$$\begin{aligned} E + 1 + \chi_1\chi_2(-1) &= \sum_{\substack{u,t \neq -1 \\ ut \neq 1}} \chi_1\chi_3(t) \chi_2\chi_3(u) \chi_1\chi_2\left(\frac{t-u}{1-ut}\right) \\ &= \sum_{u,t \neq -1} \chi_1\chi_3(t) \chi_2\chi_3(u) \chi_1\chi_2(t-u) \bar{\chi}_1\bar{\chi}_2(1-ut). \end{aligned}$$

Since $\chi_1\chi_3$ and $\chi_2\chi_3$ are nontrivial,

$$E = \sum_{u,t \neq 0} \chi_1\chi_3(t) \chi_2\chi_3(u) \chi_1\chi_2(t-u) \bar{\chi}_1\bar{\chi}_2(1-ut).$$

Replace t by t/u to obtain

$$\begin{aligned} E &= \sum_{u,t \neq 0} \chi_1\chi_3(t) \bar{\chi}_1^2(u) \chi_1\chi_2(t-u^2) \bar{\chi}_1\bar{\chi}_2(1-t) \\ &= \sum_{u,t \neq 0} \chi_1\chi_3(t) \bar{\chi}_1\bar{\chi}_2(1-t) \bar{\chi}_1(u) \chi_1\chi_2(t-u) \{1 + \phi(u)\}. \end{aligned}$$