

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1982)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EINIGE UNENTSCHEIDBARE KÖRPERTHEORIEN  
**Kapitel:** 3) KONSTRUKTION VON K  
**Autor:** Ziegler, Martin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-52241>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

3) KONSTRUKTION VON  $K$ 

$t \in L$  sei transzendent über  $F$ .

Wir wollen  $K \subset L$  als algebraische Erweiterung von  $F(t)$  so konstruieren, daß neben (2)

$$F = \{a \in K \mid \forall b \in L^q (1 + b \in K^q \ \& \ a^q + b^{-1} \in K^q) \rightarrow b \in K^q\}$$

und

$$M = \{r \in F \mid \forall r_1, r_2 \in F (r_1 \neq r_2 \ \& \ r_1 + r_2 = r \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q \text{ oder } t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q))\}$$

$$(F^* = F \setminus \{0\})$$

$K$  gewinnen wir als Vereinigung einer Folge

$$F(t) = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset L$$

von endlichen Erweiterungen von  $F(t)$ . Um die  $q$ -ten Potenzen zu kontrollieren, wählen wir gleichzeitig eine Folge

$$\phi = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \dots$$

von endlichen Teilmengen  $S_i \subset E_i \cap L^q$  mit dem Ziel, daß

$$(K \cap L^q) \setminus K^q = \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

Um die gewünschten Darstellungen von  $M$  und  $(K \cap L^q) \setminus K^q$  nicht schon durch falsche Wahl von  $(E_i, S_i)$  unmöglich zu machen, fordern wir für alle  $i$

(4) Es gibt eine Familie  $(v_s)_{s \in S_i}$  von Bewertungen  $v_s : E_i \rightarrow G_{v_s}$ ,  $v_s$  trivial auf  $F$ , mit:

(4.1) (in  $G_{v_s}$ ) ist  $v_s(s)$  nicht durch  $q$  teilbar, ( $s \in S_i$ )

(4.2) für alle  $r_1, r_2 \in F$ ,  $r_1 + r_2 \in M$ ,  $r_1 \neq r_2$ :

$$\forall s \in S_i \quad q \text{ teilt } v_s(t^q - r_1)$$

oder

$$\forall s \in S_i \quad q \text{ teilt } v_s(t^q - r_2)$$

Wir beginnen mit einer Aufzählung  $a_0, a_1, \dots$  aller  $a \in L$ , die algebraisch über  $F(t)$  sind. Jedes Element der Folge soll unendlich oft vorkommen.

Sei  $(E_i, S_i)$  schon konstruiert. Wir unterscheiden vier Fälle:

$i = 4n$ . Es gibt zwei Fälle

- a)  $q$  teilt  $[E_i(a_n):E_i]$ . Wir setzen dann  $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$   
 b)  $q$  teilt  $[E_i(a_n):E_i]$  nicht. Dann setzen wir

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i(a_n), S_i).$$

Zum Nachweis von (4) verwenden wir

LEMMA 1.  $H_2$  sei eine endliche Erweiterung des Körpers  $H_1$ ,  $q \nmid [H_2:H_1]$   
 $v_1: H_1 \rightarrow G_{v_1}$  sei eine diskrete Bewertung. Dann gibt es auf  $H_2$  eine Fortsetzung  $v_2$  von  $v_1$  mit  $q \nmid (G_{v_2}:G_{v_1})$ .

*Beweis:* Wir können annehmen, daß  $H_2$  separabel oder rein inseparabel über  $H_1$  ist. Im separablen Fall gilt

$$[H_2:H_1] = \sum_i (G_{v_2^i}:G_{v_1}) f_i$$

wobei die  $v_2^i$  alle Fortsetzungen von  $v_1$  auf  $H_2$  durchlaufen und  $f_i$  der Grad der jeweiligen Restklassenkörpererweiterung ist.  $q$  kann also nicht alle  $(G_{v_2^i}:G_{v_1})$  teilen.

Wenn  $H_2$  rein inseparabel über  $H_1$  ist, gibt es genau eine Fortsetzung  $v_2$ .  $(G_{v_2}:G_{v_1})$  ist eine  $p$ -Potenz,  $p \neq q$ .

Wenn nun die  $v_s: E_i \rightarrow G_{v_s}$ ,  $s \in S_i$ , (4.1) und (4.2) erfüllen, wählen wir Fortsetzungen  $\bar{v}_s: E_{i+1} \rightarrow G_{\bar{v}_s}$  mit  $q \nmid (G_{\bar{v}_s}:G_{v_s})$ . Die  $\bar{v}_s$ ,  $s \in S_i$  erfüllen wieder (4.1) und (4.2).

$i = 4n+1$ . Es gibt drei Fälle

- a)  $a_n \notin E_i$  oder  $a_n \notin L^q$ . Wir setzen dann  $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$ .  
 Wenn  $a_n \in E_i \cap L^q$ , wählen wir  $v_s: E_i \rightarrow G_{v_s}$ ,  $s \in S_i$  mit (4).

- b) Es gibt ein  $s \in S_i$ , für das  $q$  nicht  $v_s(a_n)$  teilt. Setze in diesem Fall

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i \cup \{a_n\}).$$

(4) gilt, wenn wir  $v_s$  für  $v_{a_n}$  nehmen.

- c)  $q$  teilt alle  $v_s(a_n)$ ,  $s \in S_i$ . Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i(\sqrt[q]{a_n}), S_i), \text{ wobei } \sqrt[q]{a_n} \in E_i, \text{ falls } a_n \in E_i^q$$

Daß (4) gilt, folgt aus

LEMMA 2.  $q$  sei verschieden von der Charakteristik des Restklassenkörpers des bewerteten Körpers  $(H, v)$ ; es sei  $a \in H \setminus H^q$  und  $v(a)$  durch  $q$  teilbar. Dann gibt es eine Fortsetzung  $w$  von  $v$  auf  $H(\sqrt[q]{a})$  mit  $G_v = G_w$ .

*Beweis:* Zunächst bemerken wir, daß  $q = [H(\sqrt[q]{a}) : H]$ . Es gibt ein  $c \in H$  mit  $v(c^q) = v(a)$ . Wenn die Restklasse von  $c^q a^{-1}$  im Restklassenkörper keine  $q$ -Potenz ist, ist  $G_w = G_v$  für alle Fortsetzungen  $w$  von  $v$  (Gradungleichung). Sonst liegt die  $q$ -te Wurzel von  $c^q a^{-1}$  in der henselschen Hülle von  $(H, v)$ . Wir gewinnen  $w$  durch Einbettung von  $H(\sqrt[q]{a})$  in die henselsche Hülle.

$i = 4n + 2$ . Es gibt zwei Fälle

- a)  $a_n \notin E_i$  oder  $a_n \in F$ . Wir setzen  $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$   
 b)  $a_n \in E_i \setminus F$ .

Es gibt dann eine auf  $F$  triviale Bewertung  $v$  von  $E_i$ , für die  $v(a_n)$  negativ ist. (4) möge von  $(v_s)_{s \in S_i}$  erfüllt sein. Zuerst erweitern wir  $E_i$  zu einem Körper  $E$ , für den (4.2) für  $v, v_s, (s \in S_i)$  gilt:

Wenn (4.2) schon in  $E_i$  für  $v, v_s, (s \in S_i)$  gilt, bleiben wir bei  $E = E_i$ . Sonst muß es ein  $r \in F$  geben mit

$$q \text{ teilt nicht } v(t^q - r) \\ \forall s \in S_i \quad q \text{ teilt } v_s(t^q - r).$$

(Man beachte: Es gibt höchstens ein  $r \in F$ , für das  $q$   $v(t^q - r)$  nicht teilt.)  
Wir brauchen noch

LEMMA 3.  $L = L^q \cdot F$

*Beweis:* Sei  $a \in L$ . Wir suchen ein  $b \in F^*$  mit  $ab^{-1} \in L^q$ . Wenn  $L$  algebraisch- oder reell abgeschlossen ist, finden wir  $b \in \{1, -1\}$ . Im Fall  $L = \mathbf{Q}_p$  bemerken wir, daß  $c$  in  $\mathbf{Q}_p$  eine  $q$ -te Potenz ist, wenn  $w(c - d^q) \geq w(c) + 3$  (Hensels Lemma,  $w$  ist die  $p$ -adische Bewertung von  $\mathbf{Q}_p$ ). Wir wählen also  $b \in F$  so, daß  $w(a - b) \geq w(a) + 3$ . Dann ist  $w(ab^{-1} - 1) \geq w(ab^{-1}) + 3$ .

Das Lemma liefert nun ein  $d \in F^*$  mit  $d(t^q - r) \in L^q$ . Wir setzen  $E = E_i(\sqrt[q]{d(t^q - r)})$ .  $\bar{v}$  sei irgendeine Fortsetzung von  $v$  auf  $E$ , die Fortsetzungen  $\bar{v}_s$  der  $v_s$  seien nach Lemma 2 gewählt.  $(E, S_i)$  erfüllt also (4) und (4.2) gilt sogar für  $\bar{v}, \bar{v}_s, (s \in S_i)$ .

Schließlich bestimmen wir ein  $b \in E$  mit

$$b, 1 + b, a_n^q + b^{-1} \in L^q$$

$$c \text{ teilt } \bar{v}(1+b), \bar{v}(a_n^q + b^{-1}), \bar{v}_s(1+b), \bar{v}_s(a_n^q + b^{-1}), (s \in S_i)$$

$$\bar{v}(b) \text{ ist das kleinste positive Element von } G_{\bar{v}},$$

und setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E(\sqrt[q]{1+b}, \sqrt[q]{a_n^q + b^{-1}}), S_i \cup \{b\}).$$

Wenn wir  $\bar{v}, \bar{v}_s$  nach Lemma 2 fortsetzen, sehen wir, daß (4) gilt. ((4.2) ist wegen der Wahl von  $E$  erfüllt.)

Es bleibt noch  $b$  zu finden.

Die Bewertungen  $\bar{v}, \bar{v}_s$  sind unabhängig. Der Approximationssatz liefert uns also ein  $b \in E$  mit

$$q \text{ teilt } \bar{v}_s(b), \bar{v}_s(b) < o, -\bar{v}_s(a_n^q), (s \in S_i, \bar{v} \neq \bar{v}_s)$$

$$\bar{v}(b) = \text{kleinstes positives Element von } G_{\bar{v}}.$$

Man rechnet jetzt leicht nach, daß alle Werte  $\bar{v}(1+b), \bar{v}(a_n^q + b^{-1}), \bar{v}_s(1+b), \bar{v}_s(a_n^q + b^{-1})$  durch  $q$  teilbar sind. Wenn  $L = L_p, \mathbf{C}$  oder  $q \neq 2$  und  $L = \mathbf{R}$  ist auch klar, daß  $b, 1+b, a_n^q + b^{-1} \in L^q$ . In den anderen Fällen müssen wir  $b$  noch genauer bestimmen:

$L = \mathbf{R}, q = 2$ : Wir wählen  $b$  so, daß zusätzlich  $b > 0$ .

$L = \mathbf{Q}_p$ :  $w$  sei die  $p$ -adische Bewertung von  $L$ ,  $d \in \mathbf{Q}^q$  mit  $w(d) \geq 3$  und  $w(a_n^q d) \geq 3$ . Mit dem Approximationssatz wählen wir nun  $b$  so, daß zusätzlich  $w(d-b) \geq w(d) + 3$ . Dann ist.

$$w(b-d) \geq w(b) + 3 \Rightarrow b \in L^q,$$

$$w((1+b)-1) = w(d) \geq 3 \Rightarrow 1+b \in L^q,$$

$$w((a_n^q + b^{-1}) - b^{-1}) \geq w(b^{-1}) + 3 = w(a_n^q + b^{-1}) + 3 \\ \Rightarrow a_n^q + b^{-1} \in L^q.$$

$i = 4n+3$ . Wir unterscheiden zwei Fälle

a)  $a_n \in M$  oder  $a_n \notin F$ . Hier setzen wir  $(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i)$

b)  $a_n \in F \setminus M$ .

(4) sei durch  $(v_s)_{s \in S_i}$  erfüllt. Wir beachten, daß

$$B = \{r \in F \mid \exists s \in S_i \quad q \text{ teilt nicht } v_s(t^q - r)\}$$

endlich ist.

Für  $r \in F^*$  hat  $t^q - r$  keine mehrfachen Faktoren (in  $F[t]$ ). Es gibt also eine auf  $F$  triviale Bewertung  $\bar{v}_r$  von  $F(t)$ , für die  $\bar{v}_r(t^q - r)$  das kleinste positive Element von  $G_{\bar{v}_r}$  ist. Wir wählen für jedes  $r$  eine Fortsetzung  $w_r$  von  $\bar{v}_r$  auf  $E_i$ . Dann ist  $G_{\bar{v}_r} = G_{w_r}$  für fast alle  $r$ . Die Menge

$$C = \{r \in F^* \mid q \text{ teilt } w_r(t^q - r)\}$$

ist also endlich. Wir bemerken noch, daß  $w_r(t^q - r') = 0$ , wenn  $r \neq r'$ . Wir wählen jetzt  $r_1 \in F$  so, daß  $r_1 \neq 0$ ,  $a_n, 2r_1 \neq a_n$  und  $r_1$  in keiner der Mengen

$$C, a_n - C, M - B, a_n - (M - B)$$

liegt. Es sei  $r_2 = a_n - r_1$ . Lemma 3 liefert uns  $s_i \in F^*$  mit  $s_i(t^q - r_i) \in L^q$ . Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i \cup \{s_1(t^q - r_1), s_2(t^q - r_2)\}).$$

Es muß noch (4) gezeigt werden.

Weil  $q$   $w_{r_1}(t^q - r_1)$  und  $w_{r_2}(t^q - r_2)$  nicht teilt, gilt zunächst (4.1) für die Bewertungen  $w_{r_1}, w_{r_2}, v_s$ , ( $s \in S_i$ ). Um (4.2) zu zeigen, seien  $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2 \in F$ ,  $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 \in M$  gegeben. Es ist dann z.B. für alle  $s \in S_i$   $v_s(t^q - \bar{r}_1)$  durch  $q$  teilbar. Wenn auch  $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$  und  $w_{r_2}(t^q - \bar{r}_1)$  durch  $q$  teilbar sind, sind wir fertig. Sei also z.B.  $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$  nicht  $q$ -teilbar. Dann ist  $r_1 = \bar{r}_1$ ,  $r_i \neq \bar{r}_2$  und  $\bar{r}_2 \in M - r_1$ . Folglich ist  $w_{r_i}(t^q - \bar{r}_2) = 0$ , und alle  $v_s(t^q - \bar{r}_2)$ , ( $s \in S_i$ ), sind durch  $q$  teilbar.

Damit ist die Konstruktion von  $K$  abgeschlossen.

#### 4) DIE EIGENSCHAFTEN VON $K$

Wir zeigen in diesem Abschnitt (2) und

$$(5) \quad (K \cap L^q) \setminus K^q = \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

$$(5') \quad K \setminus F^* \cdot K^q = F^* \cdot \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

$$(6) \quad F = \{a \in K \mid \forall b \in L^q \quad (1 + b \in K^q \ \& \ a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in K^q\}$$

$$(6') \quad F = \{a \in K \mid \forall b \in K \quad (1 + b \in K^q \ \& \ a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in F^* \cdot K^q\}$$

$$(7) \quad M = \{r \in F \mid \forall r_1, r_2 \in F \quad (r_1 \neq r_2 \ \& \ r_1 + r_2 = r) \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q \text{ oder } t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q)\}$$