

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1982)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EINIGE UNENTSCHEIDBARE KÖRPERTHEORIEN
Kapitel: 4) Die Eigenschaften von K
Autor: Ziegler, Martin
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-52241>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Für $r \in F^*$ hat $t^q - r$ keine mehrfachen Faktoren (in $F[t]$). Es gibt also eine auf F triviale Bewertung \bar{v}_r von $F(t)$, für die $\bar{v}_r(t^q - r)$ das kleinste positive Element von $G_{\bar{v}_r}$ ist. Wir wählen für jedes r eine Fortsetzung w_r von \bar{v}_r auf E_i . Dann ist $G_{\bar{v}_r} = G_{w_r}$ für fast alle r . Die Menge

$$C = \{r \in F^* \mid q \text{ teilt } w_r(t^q - r)\}$$

ist also endlich. Wir bemerken noch, daß $w_r(t^q - r') = 0$, wenn $r \neq r'$. Wir wählen jetzt $r_1 \in F$ so, daß $r_1 \neq 0$, $a_n, 2r_1 \neq a_n$ und r_1 in keiner der Mengen

$$C, a_n - C, M - B, a_n - (M - B)$$

liegt. Es sei $r_2 = a_n - r_1$. Lemma 3 liefert uns $s_i \in F^*$ mit $s_i(t^q - r_i) \in L^q$. Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i \cup \{s_1(t^q - r_1), s_2(t^q - r_2)\}).$$

Es muß noch (4) gezeigt werden.

Weil q $w_{r_1}(t^q - r_1)$ und $w_{r_2}(t^q - r_2)$ nicht teilt, gilt zunächst (4.1) für die Bewertungen w_{r_1}, w_{r_2}, v_s , ($s \in S_i$). Um (4.2) zu zeigen, seien $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2 \in F$, $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 \in M$ gegeben. Es ist dann z.B. für alle $s \in S_i$ $v_s(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar. Wenn auch $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ und $w_{r_2}(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar sind, sind wir fertig. Sei also z.B. $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ nicht q -teilbar. Dann ist $r_1 = \bar{r}_1$, $r_i \neq \bar{r}_2$ und $\bar{r}_2 \in M - r_1$. Folglich ist $w_{r_i}(t^q - \bar{r}_2) = 0$, und alle $v_s(t^q - \bar{r}_2)$, ($s \in S_i$), sind durch q teilbar.

Damit ist die Konstruktion von K abgeschlossen.

4) DIE EIGENSCHAFTEN VON K

Wir zeigen in diesem Abschnitt (2) und

$$(5) \quad (K \cap L^q) \setminus K^q = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

$$(5') \quad K \setminus F^* \cdot K^q = F^* \cdot \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

$$(6) \quad F = \{a \in K \mid \forall b \in L^q \quad (1 + b \in K^q \ \& \ a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in K^q\}$$

$$(6') \quad F = \{a \in K \mid \forall b \in K \quad (1 + b \in K^q \ \& \ a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in F^* \cdot K^q\}$$

$$(7) \quad M = \{r \in F \mid \forall r_1, r_2 \in F \quad (r_1 \neq r_2 \ \& \ r_1 + r_2 = r) \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q \text{ oder } t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q)\}$$

Beweis von (2): Sei $K \subset H \subset L$ und H endlich über K . Wir wollen zeigen, daß q den Grad $[H:K]$ teilt. Wir können $H = K(a)$ annehmen. Für beliebig große n ist $a = a_n$. Wir wählen n so groß, daß

$$[E_{4n}(a) : E_{4n}] = [K(a) : K].$$

In der Konstruktion tritt bei $i = 4n$ der Fall a) ein. Also teilt q

$$[E_{4n}(a) : E_{4n}].$$

Beweis von (5) und (5') :

„ \supset “ Sei $a \in F^* \cdot K^q$. Für alle genügend großen i ist dann $a \in F^* \cdot E_i^q$ und $v(a)$ für alle auf F trivialen v durch q teilbar. Nach (4.1) liegt a nicht in $F^* \cdot S_i$.

„ \subset “ Sei $a \in K \setminus F^* \cdot K^q$. Nach Lemma 3 wählen wir $f \in F^*$ mit $\bar{a} = af \in L^q$. Wir haben jetzt $\bar{a} \in (K \cap L^q) \setminus K^q$.

Es sei $a_n = \bar{a}$ und n so groß, daß $\bar{a} \in E_{4n+1}$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n+1$ der Fall b) ein. Also ist $\bar{a} \in S_{i+1}$. Daraus folgt $a \in F^* \cdot S_{i+1}$.

Beweis von (6) und (6') :

„ \subset “ Sei $a \in F$. Für ein $b \in K$ sei $1 + b \in K^q$ und $a^q + b^{-1} \in K^q$. i sei so groß daß $1 + b \in E_i^q$ und $a^q + b^{-1} \in E_i^q$. v sei eine auf F triviale Bewertung von E_i . Wenn $v(b) > 0$, ist $v(b) = -v(a^q + b^{-1})$ durch q teilbar. Wenn $v(b) < 0$, ist $v(b) = v(1 + b)$ durch q teilbar. Weil also $v(b)$ immer durch q teilbar ist, ist nach (4) $b \notin F^* \cdot S_i$. (5') ergibt $b \in F^* \cdot K^q$. Wenn $b \in L^q$, folgt aus (5), daß $b \in K^q$.

„ \supset “ Sei $a \in K \setminus F$. n sei so groß, daß $a \in E_{4n+2}$, und es sei $a = a_n$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n+2$ der Fall b) ein. In S_{i+1} gibt es dann ein b mit $1 + b, a^q + b^{-1} \in E_{i+1}^q$. Wir haben also

$$b \in L^q, 1 + b \in K^q, a^q + b^{-1} \in K^q, b \notin F^* \cdot K^q.$$

Beweis von (7) :

„ \subset “ Sei $r_1 + r_2 \in M$, $r_1 \neq r_2$. Wenn die $t^q - r_1$ beide nicht in $F^* \cdot K^q$ sind, ist nach (5') $t^q - r_1, t^q - r_2 \in F^* \cdot S_i$ für genügend großes i . Das widerspricht aber (4).

„ \supset “ Sei $r = a_n \in F \setminus M$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n+3$ der Fall b) ein. Es gibt dann $r_1 \neq r_2 \in F$, $r_1 + r_2 = r$ und $s_i \in F^*$, für die $s_1(t^q - r_1), s_2(t^q - r_2) \in S_{i+1}$. Also nach (5') $t^q - r_1, t^q - r_2 \notin F^* \cdot K^q$.