

# 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A (CAS DIFFÉRENTIABLE)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(qui appartient à ce plan homogène) doit être parallèle à la tangente à  $\mathbb{C}$  en  $x_\varphi$ . Le champ continu de droites

$$\varphi \mapsto x_\varphi + P(d_\varphi)$$

est défini sur toute la courbe  $\mathbb{C}$  et fournit la tangente  $t_\varphi$  à  $\mathbb{C}$  en  $x_\varphi$  chaque fois que ce point est dérivable sur  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire sauf en un ensemble au plus dénombrable de points. Il ne reste plus qu'à démontrer le lemme suivant (formulé avec des notations légèrement différents et plus usuelles).

LEMME. Soient  $I$  un intervalle (d'intérieur non vide dans  $\mathbf{R}$ ) et  $f$  une fonction continue  $I \rightarrow \mathbf{R}$ . Supposons  $f$  dérivable en tous les points de  $I - D$  où  $D$  est une partie au plus dénombrable de  $I$ . S'il existe une fonction continue  $g: I \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $g(x) = f'(x)$  en tout  $x \in I - D$ , alors  $f$  est continûment dérivable sur tout  $I$  et  $f' = g$ .

La démonstration de ce lemme est facile! Appelons  $h$  la primitive de  $g$  nulle en  $x = a$

$$h(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Par définition  $h$  est continûment dérivable avec  $h' = g$ . Par hypothèse,  $f - h$  est dérivable en tout  $x \in I - D$  et de dérivée nulle en ces points. Comme cette fonction  $f - h$  est continue, le théorème des accroissements finis montre qu'elle est constante:  $f = h + c$  est continûment dérivable et  $f' = h' = g$ .

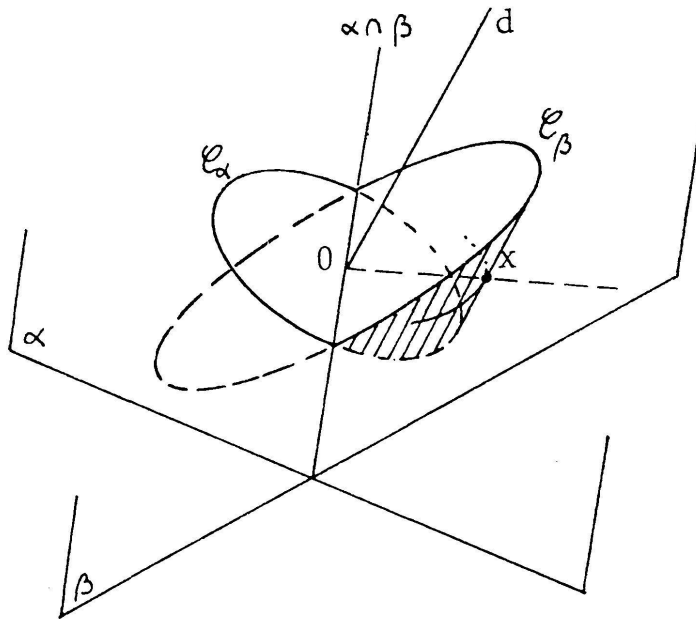
### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A (CAS DIFFÉRENTIABLE)

Nous avons vu (point 4, sec. 2) que sous les hypothèses du théorème A, il y a un unique projecteur  $P_\alpha$  de norme 1 sur chaque plan homogène  $\alpha$ . Montrons maintenant que

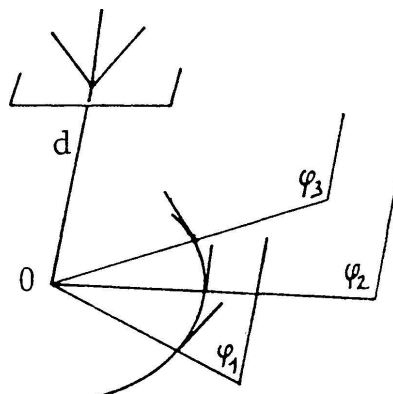
$$\alpha \mapsto \text{Ker}(P_\alpha) = d_\alpha$$

est *injective*: à deux plans (homogènes) distincts correspondent des directions de projection de norme 1 *distinctes*. En effet, prenons deux plans homogènes  $\alpha \neq \beta$ . Si les projecteurs  $P_\alpha$  et  $P_\beta$  avaient même noyau  $d$ , la surface  $S = \text{Fr}(K)$  contiendrait une portion de cylindre de génératrices parallèles à  $d$ , limitée par  $\alpha$  et  $\beta$ . Considérons alors une section *intermédiaire*  $\mathbb{C}_\gamma = S \cap \gamma$  ( $\gamma$  est un plan homogène contenant la droite  $\alpha \cap \beta$  et situé entre  $\alpha$  et  $\beta$  relativement à  $d$ ). D'après le théorème de Krein-Milman, on peut choisir un point  $x$  de  $\mathbb{C}_\gamma$  extrême sur  $K \cap \gamma$  et non situé sur la droite  $\alpha \cap \beta$  (il pourrait arriver que les seuls points ayant les propriétés indiquées soient  $x$  et  $-x$ : ce cas se présenterait si  $K \cap \gamma$  était

un parallélogramme avec deux sommets sur  $\alpha \cap \beta$ ! On comparera d'ailleurs cette situation avec sa duale du point 4, sec. 2). Ainsi,  $x$  est intérieur à un segment de  $S$  parallèle à  $d$ , tout en étant extrémal sur toutes les sections planes de  $K$  définies par des plans homogènes  $\gamma'$  contenant  $0x$  et distinctes du plan engendré par  $d$  et  $0x$ . Les projecteurs de norme 1 sur ces plans  $\gamma'$  devraient avoir  $d$  comme noyau, contrairement au fait que l'ensemble des projecteurs correspondant au faisceau de plans d'axe  $0x$  est compact.



L'application bijective  $\alpha \mapsto d_\alpha = \text{Ker}(P_\alpha)$  transforme plans coaxiaux en droites coplanaires. En effet, les droites  $d_i$  correspondant à un système de plans  $\phi_i$  contenant une droite commune  $d$  (homogène) doivent être parallèles aux plans tangents en les deux points symétriques de  $S \cap d$ . En d'autres termes, l'application considérée transforme droites de  $\mathbf{P}^*$  en droites de  $\mathbf{P}$ . Le théorème fondamental de la géométrie projective affirme alors qu'il existe une application linéaire bijective de  $\mathbf{R}_3 = (\mathbf{R}^3)^*$  dans  $\mathbf{R}^3$  qui induit  $\alpha \mapsto d_\alpha$  au niveau des espaces projectifs (puisque le corps  $\mathbf{R}$  n'a aucun automorphisme non trivial, il n'y a pas à utiliser le résultat de continuité ici).



En particulier, si on fixe une section plane  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\alpha$  de  $S$ , il existe une application linéaire  $A$  bijective  $\alpha \rightarrow \alpha$  telle que  $A(0x_\varphi) = d_\varphi$  ( $d_\varphi$  étant la droite homogène parallèle à la tangente  $t_\varphi$  à  $\mathfrak{C}$  en  $x_\varphi$  : les notations sont celles du point 6 de la sec. 1). Dans le plan  $\alpha$ , et en coordonnées polaires d'angle  $\varphi$  en 0, la courbe  $\mathfrak{C}$  est ainsi une solution (stricte puisque continûment dérivable) d'une équation différentielle vectorielle du type

$$\frac{d}{d\varphi} \tilde{x} = A\tilde{x} \quad (\tilde{x} = 0x \in \alpha).$$

Comme cette solution  $\mathfrak{C}$  est fermée, la discussion de ces systèmes autonomes en dimension 2 montre que les valeurs propres de  $A$  doivent être imaginaires pures (conjuguées) et  $\mathfrak{C}$  est une ellipse!

Globalement, prenant un système d'axes  $Oxyz$ , les trois sections de  $S$  par les plans de coordonnées doivent être des ellipses et  $S$  est engendrée par une famille d'ellipses (verticales pour fixer les idées) s'appuyant sur une ellipse de base fixe. C'est un ellipsoïde.