

## §2. Notation

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

There are just  $[xp_1^{-k}]$  of these  $n \leq x$ , and since  $[z] \geq z/2$  for  $z \geq 1$ , we get the result.

It is clear that Theorem 1.24 is essentially best possible in certain extreme cases (for example, if  $E = \{p_1\}$ , or if  $x = p_1^a$  and  $y = a - 1$ ).

When  $E = P$  (the set of all primes), we can take  $v = \log_2 x$ . Then  $\Lambda = O(1)$ , and we have the following corollary of Theorems 1.21 and 1.24:

**COROLLARY 1.25.** *If  $x \geq e^e$  and  $0 \leq y \leq (\log x)(\log 2)^{-1} - 1$ , then*

$$2^{-y-2} x \leq S(x, y; P, \Omega) \leq c_6 2^{-y} x (\log x) (\log_2 x)^{1/2}.$$

Corollary 1.25 should be compared with the Erdős-Sárközy result (1.20) and with the asymptotic formula of Selberg mentioned after Theorem 1.18. When  $y < 2 \log_2 x$  (roughly), more precise estimates for  $S(x, y; P, \Omega)$  can be obtained from [13] and [14].

In a later paper, we shall show that if  $p_1$  is the smallest member of  $E$  and  $\varepsilon > 0$  is fixed, then the precise order of magnitude of  $S(x, y; E, \Omega)$  is

$$p_1^{-y} x \exp \{(p_1 - 1) E(x)\}$$

when  $E(x)$  is sufficiently large and

$$p_1 E(x) \leq y \leq (1 - \varepsilon) (\log x) (\log p_1)^{-1}.$$

This theorem is much more difficult to prove than Theorem 1.21. Its proof depends on Theorem 1.21 and on an extension of Halász's work [4] concerning the local distribution of  $\Omega(n; E)$ . Theorem 1.21 remains our best upper bound when  $y$  is close to  $(\log x) (\log p_1)^{-1}$  (cf. Theorem 1.18), and it seems to be the most we can achieve by a fairly simple method.

## §2. NOTATION

The symbols  $a, m, n$  always represent integers with  $a \geq 0, m \geq 0, n > 0$ . The letter  $p$  always denotes a prime, while  $v, w, x, y, z, \alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \sigma$  are real numbers.  $[x]$  means the largest integer  $\leq x$ . The notation  $\log_2 x$  is defined by (1.5), and the notations  $O, O_{\delta, \varepsilon, \dots}, c_i, c_i(\delta, \varepsilon, \dots)$  are explained after Theorem 1.6. If a condition such as " $x \geq c_i(\delta, \varepsilon, \dots)$ " is used as a hypothesis, it is to be understood that  $c_i(\delta, \varepsilon, \dots)$  is sufficiently large. We shall occasionally use the notations  $\ll, \gg$  to imply constants which are *absolute*. (Thus  $A = O(B)$  is equivalent to  $A \ll B$ .)

Empty sums mean 0, empty products 1, and we define  $0^0 = 1$ . The notation

$$x_1 \cdots x_m / y_1 \cdots y_n$$

is sometimes used instead of

$$(x_1 \cdots x_m) (y_1 \cdots y_n)^{-1}.$$

Throughout this paper,  $E$  denotes a nonempty set of primes, to be regarded as quite arbitrary unless further assumptions are stated.  $E(x)$  is always defined by (1.2).  $p_1$  always means the smallest member of  $E$ , and if

$$E - \{p_1\} = \{p : p \in E \quad \text{and} \quad p \neq p_1\}$$

is not empty, then  $p_2$  denotes the smallest member of  $E - \{p_1\}$ . When  $x$  and  $v$  are positive, the function  $\Lambda = \Lambda(x, v; E)$  is always defined by (1.22).

### §3. PROOFS OF THEOREMS 1.6 AND 1.11, AND RELATED RESULTS

Before proving (1.8), we observe that a similar but weaker inequality has a very simple proof. For if  $y > 1$ , then

$$\log n \geq \sum_{p|n} \log p \geq \sum_{p|n, p \geq y} \log p \geq (\log y) \sum_{p|n, p \geq y} 1,$$

and hence

$$\omega(n) = \sum_{p|n, p < y} 1 + \sum_{p|n, p \geq y} 1 \leq y + (\log n) (\log y)^{-1}.$$

The right-hand side is approximately minimized by taking

$$y = (\log n) (\log_2 n)^{-2},$$

and we obtain

$$\omega(n) \leq \frac{\log n}{\log_2 n} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log_3 n}{\log_2 n}\right) \right\} \quad \text{for} \quad n \geq 16 (> e^e). \quad (3.1)$$

Another simple proof of (3.1) can be based on Newman's observation [11, p. 652] that if  $\omega(n) = r$ , then  $n \geq r!$ .

To get the sharper inequality (1.8), it seems to be necessary to use an assumption such as (1.7) about the distribution of  $E$ . First we need a lemma relating  $\pi(x; E)$  (defined by (1.4)) and

$$\theta(x; E) = \sum_{p \leq x, p \in E} \log p. \quad (3.2)$$