

## 2. Partie analytique de la démonstration

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Similairement

$$E(e_2, e_3) = ah_{12} + bh_{22} = r \in \mathbf{Z},$$

$$E(e_2, e_4) = ch_{12} + ch_{22} = s \in \mathbf{Z},$$

puis éliminant  $h_{22}$

$$(ad - bc)h_{12} = dr - bs.$$

Par comparaison, on trouve donc

$$(**) \quad qa + sb - pc - rd = 0.$$

Les nombres réels  $a, b, c, d$  sont donc  $\mathbf{Q}$ -linéairement dépendants. Commencant par choisir  $a, b, c$  réels  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants, on peut certainement trouver  $d$  réel, différent de  $bc/a$  et  $\mathbf{Q}$ -indépendant de  $a, b, c$ . Amplifiant tous ces nombres par un même facteur réel non nul au besoin, on pourra satisfaire (\*) tout en conservant des nombres  $\mathbf{Q}$ -indépendants. Le réseau correspondant  $L$  n'aura pas la propriété mentionnée dans le théorème de base. Par exemple, on pourrait prendre

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{5}, d = \sqrt{7}.$$

## 2. PARTIE ANALYTIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Nous supposerons ici que le tore complexe  $V/L$  (notations de la sec. 1) satisfait la condition donnée dans le théorème de base, donc qu'il existe une forme hermitienne  $H$  définie positive sur  $V$  de partie imaginaire entière sur les couples d'éléments de  $L$ , et démontrerons que ce tore admet un plongement projectif complexe. Le produit scalaire hilbertien est donc dénoté par  $H(u, v) = (u|v)$ . Nous conviendrons que ce produit scalaire est  $\mathbf{C}$ -linéaire en la seconde variable (sic)

$$v \mapsto H(u, v) \text{ } \mathbf{C}\text{-linéaire (pour tout } u \in V),$$

$$H(u, \alpha v) = \alpha H(u, v) \text{ (pour tous } u, v \in V \text{ et } \alpha \in \mathbf{C}).$$

Appelons  $B$  la partie réelle de  $H$  et  $E$  la partie imaginaire de  $H$  de sorte que

$$H(u, v) = B(u, v) + iE(u, v)$$

et

$$H(v, u) = \overline{H(u, v)} = B(u, v) - iE(u, v).$$

On voit donc que, par définition de  $B$  et  $E$ ,

$$B(v, u) = B(u, v) \text{ et } E(v, u) = -E(u, v).$$

La forme  $\mathbf{R}$ -bilinéaire  $B$  est symétrique (et définie positive comme  $H$  puisque  $B(u, u) = H(u, u) > 0$  si  $u \neq 0$ ), tandis que la forme  $\mathbf{R}$ -bilinéaire  $E$  est alternée (i.e. antisymétrique). Chacune des deux formes  $B$  ou  $E$  détermine complètement  $H$ . Par exemple, on a

$$H(u, iv) = B(u, iv) + iE(u, iv),$$

et aussi

$$iH(u, v) = iB(u, v) - E(u, v);$$

par comparaison des parties réelles et imaginaires de ces quantités (égales!), on en tire

$$B(u, v) = E(u, iv) \text{ et } E(u, v) = -B(u, iv).$$

La positivité de  $H$  (ou de  $B$ ) se reconnaît donc sur  $E$  de la façon suivante

$$E(u, iu) > 0 \text{ si } u \neq 0.$$

De même,  $H(iu, iv) = H(u, v)$  fournit  $E(iu, iv) = E(u, v)$ . Inversement, partant d'une forme alternée  $E$  satisfaisant  $E(iu, iv) = E(u, v)$ , la définition

$$H(u, v) = E(u, iv) + iE(u, v)$$

fournit une forme hermitienne (vérification par calcul direct!), définie positive lorsque  $E(u, iu) > 0$  pour  $u \neq 0$ . Les propriétés de  $H$  sont donc traduites en les propriétés suivantes de  $E$

$$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ est une forme } \mathbf{R}\text{-bilinéaire alternée (à valeurs réelles),} \\ E(iu, iv) = E(u, v) \text{ (} u, v \in V \text{) et } E(u, iu) > 0 \text{ pour } 0 \neq u \in V. \end{array} \right.$$

La forme alternée entière  $E$  sur  $L$  va nous permettre de décomposer ce réseau comme somme directe de deux sous-réseaux sur chacun desquels elle est isotrope.

LEMME (Frobenius: Oeuvres complètes, vol. I, p. 493). *Il existe une base* <sup>1)</sup>  $e_1, \dots, e_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $L$  telle que

$$\begin{aligned} E(e_i, e_j) &= E(\lambda_i, \lambda_j) = 0, \\ E(e_i, \lambda_j) &= d_i \delta_{ij} \text{ (nul si } i \neq j, = d_i \text{ si } i = j) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Une telle base sera appelée dorénavant *base symplectique*.

avec des entiers  $d_i$  satisfaisant

$$d_{i+1} \text{ multiple de } d_i \text{ (pour } i \leq n-1 \text{)}.$$

*Preuve.* Montrons simplement comment on commence la démonstration de ce lemme classique d'algèbre (c'est une forme du théorème des diviseurs élémentaires ou un aspect de la réduction des formes alternées...). Pour chaque  $0 \neq a \in L$  on considère l'idéal  $I_a = \{E(a, b) : b \in L\} \subset \mathbf{Z}$ . Posons  $I_a = d_a \mathbf{Z}$  avec un entier positif  $d_a$  bien déterminé. Définissons alors  $d_1 = \inf_{a \neq 0} d_a = \min_{a \neq 0} d_a \geq 0$ . Si  $d_1 = 0$ , il y a un élément  $a \neq 0$  de  $L$  avec  $I_a = 0$  donc tel que  $E(a, v) = 0$  (pour tout  $v \in V$  par  $\mathbf{R}$ -linéarité) donc tel que  $E(a, ia) = 0$  contredisant la positivité de  $E$  (ou de  $H$ ). On a donc  $d_1 > 0$  et on prend  $e_1, \lambda_1 \in L$  avec  $E(e_1, \lambda_1) = d_1$ . La démonstration continue alors par induction, extrayant le plan hyperbolique engendré par ces deux vecteurs par considération du supplémentaire orthogonal.

Nous dénoterons par  $L_1$  le sous-groupe engendré par les  $e_i$  et par  $L_2$  le sous-groupe engendré par les  $\lambda_i$ . On a donc

$$L = L_1 \oplus L_2, \text{ rang}(L_i) = n, E \text{ triviale sur chaque } L_i.$$

De plus, la forme  $E$  permet d'identifier un élément  $b$  de  $L_2$  à un homomorphisme

$$E(., b) : L_1 \rightarrow \mathbf{Z}, a \mapsto E(a, b).$$

On obtient ainsi un homomorphisme injectif (plongement)

$$E : L_2 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\text{-dual de } L_1.$$

Comme la base duale de  $(e_i)$  dans  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})$  est constituée des formes  $d_i^{-1} \lambda_i$ , on voit que le plongement précédent a une image d'indice fini égal au produit des  $d_i$  (ce produit est appelé Pfaffien de  $E$ ). En particulier, lorsque tous les  $d_i = 1$ , on dit que  $E$  est *unimodulaire*, dans ce cas  $L_2$  s'identifie au  $\mathbf{Z}$ -dual de  $L_1$  (via  $E$ ).

Pour plonger  $V/L$  dans un espace projectif, il s'agit de construire des fonctions sur cette variété, donc de définir des fonctions  $L$ -périodiques sur  $V$ . Commençons par considérer plus simplement des fonctions  $L_1$ -périodiques, données par des développements de Fourier selon les exponentielles de base relatives à  $L_1$ . Ces considérations d'analyse vont fournir « toutes » les fonctions  $L_1$ -périodiques sur  $V_1 = L_1 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$  comme séries en les

$$v \mapsto \exp(2\pi i \lambda(v)) \quad (\lambda \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})).$$

Nous considérerons plus particulièrement les exponentielles

$$v \mapsto \exp(2\pi i E(v, \lambda)) \quad (\lambda \in L_2).$$



Ces dernières fournissent une base des fonctions sur  $V_1$ , invariantes par les  $d_i^{-1} e_i$  donc en particulier aussi des fonctions sur le tore réel  $V_1/L_1$ . (Le lecteur qui souhaite simplifier au maximum la démonstration pourra supposer  $E$  unimodulaire dès à présent.) Pour fabriquer des fonctions analytiques sur  $V$ , nous complexifierons simplement  $V_1$  en permettant à  $v$  de varier dans  $V_1 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ . Il est donc important de savoir que  $V_1$  engendre tout  $V$  sur  $\mathbf{C}$ .

LEMME. On a  $V = V_1 \oplus iV_1$  et donc  $V = V_1 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ .

*Preuve.* Comme  $V_1$  et  $iV_1$  ont même dimension réelle  $n$ , il suffit de montrer que  $V_1 \cap iV_1 = \{0\}$ . Ceci est clair car si  $u \in V_1 \cap iV_1$ , on a  $u = v_1 = iw_1$  (avec  $v_1$  et  $w_1$  dans  $V_1$ ) qui implique

$$H(u, u) = E(u, iu) = E(v_1, -w_1) = 0$$

par trivialité de  $E$  sur  $L_1$  et donc aussi sur  $V_1$ . On en conclut  $u = 0$ .

Pour étendre holomorphiquement les exponentielles  $\exp(2\pi i E(\cdot, \lambda))$  il suffit de considérer les extensions  $\mathbf{C}$ -linéaires  $f_\lambda(v)$  des  $E(v, \lambda)$  (permettant ainsi à  $v$  de varier dans  $V$  entier, plus seulement dans  $V_1$ ). Une telle extension  $\mathbf{C}$ -linéaire est définie par

$$f_\lambda(v_1 + iv'_1) = E(v_1, \lambda) + iE(v'_1, \lambda),$$

et l'exponentielle holomorphe  $L_1$ -périodique sur  $V$  correspondante

$$V \ni z \mapsto \exp(2\pi i f_\lambda(z)) \quad (\lambda \in L_2 \text{ ou } \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})).$$

Les séries de Fourier que nous aurons à considérer auront la forme

$$\sum_{\lambda \in L_2} c_\lambda \exp(2\pi i f_\lambda(z))$$

avec des coefficients  $c_\lambda \in \mathbf{C}$  non tous nuls (décroissant suffisamment rapidement à l'infini pour assurer une « bonne » convergence). Les fonctions décrites par de tels développements peuvent être considérées comme fonctions sur  $V/L_1$  (mais pas sur  $V/L$ !).

Pour  $z$  fixé dans  $V$ , le module de  $\exp(2\pi i f_\lambda(z))$  croît en  $\lambda$  comme l'exponentielle d'une fonction linéaire de  $\lambda$ . Pour assurer une convergence rapide de la série de Fourier (convergence simple en  $z$  ou convergence uniforme sur tout compact de  $V$ ), il suffit de prendre des coefficients  $c_\lambda$  dont le module décroît de façon gaussienne (exponentielle d'une forme quadratique définie négative). Or nous avons à notre disposition la forme  $f_\lambda(\lambda)$ . Puisque

$$\text{Im } f_\lambda(\lambda) = E(\lambda'_1, \lambda) = E(\lambda'_1, i\lambda'_1) = H(\lambda'_1, \lambda'_1) \geq 0$$

(nous avons écrit un  $\lambda \in L_2 \subset V = V_1 \oplus iV_1$  sous la forme  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda'_1$ , où  $\lambda_1$  et  $\lambda'_1 \in V_1$  et avons utilisé l'isotropie de  $E$  sur  $V_1$ ), il s'agit de prendre

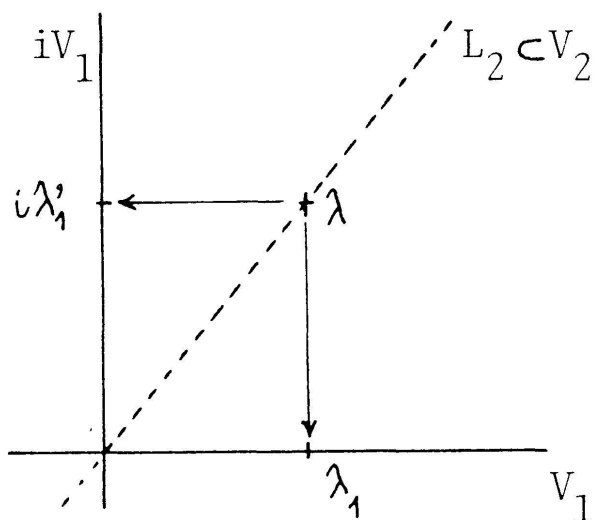
$$c_\lambda = \exp(i\pi f_\lambda(\lambda)) \text{ d'où } |c_\lambda| = \exp - \pi \text{Im } f_\lambda(\lambda) \\ = \exp - \pi H(\lambda'_1, \lambda'_1).$$

Il est clair que  $0 \neq \lambda \in L_2 \Rightarrow \lambda'_1 \neq 0$  et donc  $H(\lambda'_1, \lambda'_1) > 0$  car si  $\lambda'_1$  était nul,  $\lambda = \lambda_1$  appartiendrait à  $V_1$  or  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$  ( $V_1$  et  $V_2 = L_2 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$  sont supplémentaires). Ceci assure la décroissance gaussienne des  $|c_\lambda|$ , la forme

quadratique apparaissant en exposant étant le carré de la norme (euclidienne) associée au produit scalaire  $H$ , via projection de  $L_2$  sur  $iV_1$

$$\|\lambda'_1\|^2 = H(\lambda'_1, \lambda'_1) = H(i\lambda'_1, i\lambda'_1).$$

Le dessin illustre la situation, mais on prendra garde de ne pas croire que  $V_1$  et  $iV_1$  sont orthogonaux ( $v_1$  et  $iv_1$  sont  $\mathbf{C}$ -proportionnels donc non  $H$ -orthogonaux,  $V_1^\perp = \{0\}$  puisque  $V_1$   $\mathbf{C}$ -engendre  $V$ ).



La fonction theta de Riemann est ainsi définie par la série de Fourier

$$\theta(z) = \sum_{L_2} \exp\{i\pi f_\lambda(\lambda) + 2i\pi f_\lambda(z)\} \quad (z \in V).$$

Cette série converge uniformément sur tout compact de  $V$  et définit donc une fonction holomorphe sur  $V$  (invariante par les translations de  $L_1$ ). Pour pouvoir calculer  $\theta(z + \mu)$  avec  $\mu \in L_2$ , nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME. On a  $f_\lambda(\mu) = f_\mu(\lambda)$  pour tous  $\lambda, \mu \in L_2$ .

Vérifions l'affirmation du lemme en comparant les parties réelles et imaginaires des deux membres. D'une part

$$\text{Im } f_\lambda(\mu) = f_\lambda(\mu'_1) = E(\mu'_1, \lambda) = E(\mu'_1, i\lambda'_1) \\ = E(i\mu'_1, -\lambda'_1) = E(\lambda'_1, i\mu'_1) = E(\lambda'_1, \mu) = f_\mu(\lambda'_1) = \text{Im } f_\mu(\lambda)$$

(avec des notations  $\mu = \mu_1 + i\mu'_1$  correspondant à la décomposition

$$V = V_1 \oplus iV_1 \supset L_2).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_\lambda(\mu) &= f_\lambda(\mu_1) = E(\mu_1, \lambda) = E(\mu_1, i\lambda'_1) \\ &= E(\mu_1 + i\mu'_1, i\lambda'_1) = E(\mu, i\lambda'_1). \end{aligned}$$

Or  $E$  est isotrope sur  $L_2$ , donc  $E(\mu, \lambda) = 0$  et donc

$$E(\mu, i\lambda'_1) = -E(\mu, \lambda_1) = E(\lambda_1, \mu) = f_\mu(\lambda_1) = \operatorname{Re} f_\mu(\lambda).$$

Nous sommes alors en mesure de démontrer les *équations fonctionnelles*

$$\theta(z + \mu) = \exp\{-i\pi f_\mu(\mu) - 2i\pi f_\mu(z)\} \theta(z) \quad (\mu \in L_2).$$

Par définition

$$\theta(z + \mu) = \sum_{L_2} \exp\{i\pi f_\lambda(\lambda) + 2i\pi f_\lambda(z + \mu)\}.$$

Dans cette somme, effectuons la permutation  $\lambda \mapsto \lambda - \mu$  de l'indice de sommation (puisque  $\mu \in L_2$ , on translate simplement dans  $L_2$ ). Le terme général de la série est donc

$$\exp\{i\pi f_{\lambda-\mu}(\lambda - \mu) + 2i\pi f_{\lambda-\mu}(z + \mu)\}.$$

Calculons simplement l'exposant

$$\begin{aligned} & f_{\lambda-\mu}(\lambda - \mu) + 2f_{\lambda-\mu}(z + \mu) \\ &= f_\lambda(\lambda) - f_\lambda(\mu) - f_\mu(\lambda) + f_\mu(\mu) + 2f_\lambda(\mu) - 2f_\mu(\mu) \\ &+ 2f_\lambda(z) - 2f_\mu(z) = f_\lambda(\lambda) + 2f_\lambda(z) - f_\mu(\mu) - 2f_\mu(z) \end{aligned}$$

par la propriété de symétrie démontrée ci-dessus.

Plus généralement, nous écrirons

$$\theta(z + \lambda) = e_\lambda(z) \theta(z) \quad (\lambda \in L)$$

avec

$$\begin{cases} e_\lambda = 1 & \text{si } \lambda \in L_1 \text{ et} \\ e_\lambda(z) = \exp\{-i\pi f_\lambda(\lambda) - 2i\pi f_\lambda(z)\} & \text{si } \lambda \in L_2. \end{cases}$$

Il n'est d'ailleurs pas difficile de calculer la fonction  $e_\lambda$  en général, c'est-à-dire lorsque  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \in L_1 + L_2 = L$ . En effet, par  $L_1$ -périodicité de  $\theta$ , on a  $e_\lambda = e_{\lambda_2}$ . Mais

$$\begin{aligned} & \exp -i\pi\{f_{\lambda_1+\lambda_2}(\lambda_1 + \lambda_2) + 2f_{\lambda_1+\lambda_2}(z)\} \\ &= \exp -i\pi f_{\lambda_2}(\lambda_1) \cdot e_{\lambda_2}(z) = \exp -i\pi E(\lambda_1, \lambda_2) \cdot e_{\lambda_2}(z) \end{aligned}$$

d'où

$$e_\lambda(z) = e_{\lambda_2}(z) = e^{i\pi E(\lambda_1, \lambda_2)} e^{-i\pi\{f_\lambda(\lambda) + 2f_\lambda(z)\}}.$$

On retrouve bien le facteur exponentiel ci-dessus lorsque  $\lambda_1 = 0$  (i.e. lorsque  $\lambda = \lambda_2 \in L_2$ ). En général, l'expression est semblable avec le signe

$$e^{i\pi E(\lambda_1, \lambda_2)} = \pm 1 \quad (= +1 \text{ si } \lambda_1 \in 2L_1 !).$$

Considérons l'espace vectoriel  $S_k$  formé des fonctions entières sur  $V$  et satisfaisant les équations fonctionnelles

$$f(z + \lambda) = e_\lambda(z)^k f(z) \quad (\lambda \in L).$$

Il est clair que pour  $k \geq 1$ ,  $\theta^k \in S_k$  de sorte que ces espaces ne sont pas réduits à  $\{0\}$  (les coefficients de Fourier  $c_\lambda$  de  $\theta$  sont non nuls pour  $\lambda \in L_2$  donc  $\theta$  n'est pas identiquement nulle!). Voici comment on peut fabriquer d'autres éléments de  $S_k$ . On observe tout d'abord qu'une translatée de  $\theta$  n'appartient pas souvent (!) à  $S_1$  puisqu'elle satisfait

$$\begin{aligned} \theta_a(z + \lambda) &= \theta(z - a + \lambda) = e^{-i\pi f_\lambda(\lambda) - 2i\pi f_\lambda(z - a)} \theta(z - a), \\ \theta_a(z + \lambda) &= e^{2\pi i f_\lambda(a)} e_\lambda(z) \theta_a(z) \quad (\lambda \in L_2). \end{aligned}$$

Un produit fini de translatées va donc satisfaire

$$\prod_{j=1}^k \theta_{a_j}(z + \lambda) = e^{2\pi i \sum_j f_\lambda(a_j)} \cdot \prod_j \theta_{a_j}(z) \cdot e_\lambda(z)^k$$

et appartenir à  $S_k$  dès que  $\sum a_j = 0$ . Les fonctions (enfin!) permettant de plonger projectivement  $V/L$  seront des quotients  $f/g$  où  $f$  et  $g$  appartiennent à un même  $S_k$ . Ce sont donc des fonctions méromorphes  $L$ -périodiques sur  $V$ . Pour éviter de parler des quotients (donc de pôles...), on peut simplement considérer des applications

$$z \mapsto (f_0(z), \dots, f_m(z)) : V \rightarrow \mathbf{C}^{m+1}$$

pour une famille finie

$$(f_i)_{0 \leq i \leq m} \subset S_k \quad (\text{disons } k \text{ assez grand}).$$

Comme les  $f_i$  satisfont les mêmes équations fonctionnelles, donc sont multipliées par un même facteur lorsqu'on remplace  $z$  par  $z + \lambda$  ( $\lambda \in L$ ), les points  $z$  et  $z + \lambda$  ont les mêmes images projectives et on obtiendra ainsi des applications  $V/L \rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$  (à condition que les  $f_i$  n'aient pas de zéro commun...). Voici un énoncé plus précis.

**THÉORÈME DE LEFSCHETZ.** *Les espaces  $S_k$  ont une dimension finie et pour  $k \geq 3$ , toute base  $f_0, \dots, f_m$  de  $S_k$  fournit un plongement projectif  $V/L \rightarrow \mathbf{P}^m$ .*

*Démonstration.* Pour ne pas masquer l'idée générale, nous supposons que  $E$  est unimodulaire donc que toutes les exponentielles de base (sur  $V_1$ )  $L_1$ -périodiques sont données par les  $2\pi i E(\cdot, \lambda)$  où  $\lambda$  parcourt  $L_2$ . Toute  $f \in S_k$  possède une restriction à  $V_1$  qui est  $L_1$ -périodique et peut être développée en série de Fourier. Les équations fonctionnelles

$$f(z + \mu) = e_{\mu}(z)^k f(z) \quad (\mu \in L_2)$$

fournissent des identités pour les développements de Fourier

$$\begin{aligned} & \sum_{L_2} a_{\lambda} e^{2\pi i f_{\lambda}(z + \mu)} \\ &= e^{-i\pi k \{f_{\mu}(\mu) + 2f_{\mu}(z)\}} \sum a_{\lambda} e^{2\pi i f_{\lambda}(z)} \\ &= e^{-i\pi k f_{\mu}(\mu)} \sum a_{\lambda} e^{2\pi i f_{\lambda - k\mu}(z)} \\ &= e^{-i\pi k f_{\mu}(\mu)} \sum a_{\lambda + k\mu} e^{2\pi i f_{\lambda}(z)}. \end{aligned}$$

Identifiant les coefficients des exponentielles de base, on trouve

$$a_{\lambda} e^{2\pi i f_{\lambda}(\mu)} = a_{\lambda + k\mu} e^{-i\pi k f_{\mu}(\mu)}$$

d'où

$$a_{\lambda + k\mu} = a_{\lambda} e^{i\pi k f_{\mu}(\mu) + 2i\pi f_{\lambda}(\mu)} = a_{\lambda} e^{i\pi f_{\mu}(2\lambda + k\mu)}$$

(en vertu de la symétrie de l'expression  $f_{\lambda}(\mu)$ , lemme ci-dessus). Connaissant les  $a_{\lambda}$  dans un parallépipède de taille  $k$ , les autres coefficients s'en déduisent inductivement :

$$\begin{aligned} f &\mapsto (a_{\lambda})_{\lambda \in \text{parallépipède de } L_2} \\ S_k &\rightarrow \mathbf{C}^{k^n} \end{aligned}$$

est injective et donc  $\dim S_k \leq k^n$  est finie (on montrera plus loin que cette dimension est exactement  $k^n$ ). Montrons maintenant que lorsque  $k \geq 2$ , les fonctions dans  $S_k$  n'ont pas de zéro commun. Pour cela, soit  $z \in V$  un élément arbitraire. Nous allons construire une  $f \in S_k$  avec  $f(z) \neq 0$ . Comme nous l'avons déjà observé, les produits de translatées de la fonction theta de Riemann permettent de définir des éléments de  $S_k$

$$\theta_{a_1} \theta_{a_2} \dots \theta_{a_k} \in S_k \quad \text{dès que} \quad a_1 + \dots + a_k = 0.$$

Il suffit de choisir les points  $a_i$  de façon que  $\theta_{a_i}(z) \neq 0$ , c'est-à-dire de façon que les  $z - a_i$  n'appartiennent pas à la variété des zéros de  $\theta$ . Ceci est possible car dénotant par  $Z$  cette variété des zéros de  $\theta$  (on peut voir qu'elle n'est pas vide, mais ceci n'est pas requis ici) les conditions  $z - a_i \notin Z$  reviennent à  $a_i \notin z - Z$ . Or  $Z$  n'a pas de point intérieur ( $\theta$  est analytique et non identiquement nulle) et il

en est de même de  $Z - z$  et  $z - Z$  : la réunion de ces fermés n'aura pas non plus de point intérieur et il sera facile de choisir les  $a_i (i \geq 2)$  dans leur complémentaire (ouvert dense) de sorte que  $\sum_{i \geq 2} a_i \notin Z - z$  et on posera simplement  $a_1 = -\sum_{i \geq 2} a_i$ . Il résulte de ce point que pour toute base  $(f_0, \dots, f_m)$  de  $S_k (k \geq 2)$  les  $f_i$  n'ont pas de zéro commun et l'application  $z \mapsto (f_i(z))$  définit une application  $V/L \rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ . Il nous reste à montrer que ces applications sont des plongements lorsque  $k \geq 3$ . Ceci se fait en deux temps. On commence par voir que leurs différentielles sont injectives en chaque point (condition d'immersion), puis que les applications sont injectives. Contentons-nous de traiter le cas  $k = 3$  qui fournit le premier plongement. Pour pouvoir calculer la différentielle en question, il est convenable d'introduire des coordonnées dans  $V$ . Rappelons que nous supposons  $L$  (ou  $E$ ) unimodulaire et que nous avons introduit une base

$$e_1, \dots, e_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ de } L$$

avec

$$f_j(e_i) = f_{\lambda_j}(e_i) = E(e_i, \lambda_j) = \delta_{ij}$$

(ne pas confondre ces  $f_j$  — extensions  $\mathbf{C}$ -linéaires des  $E(., \lambda_j)$  — avec les éléments de base de  $S_k$  ... il sera prudent de revenir sous peu à une notation moins ambiguë). Nous avons aussi démontré que les éléments  $e_1, \dots, e_n$  forment une  $\mathbf{C}$ -base de  $V (V = V_1 \oplus iV_1)$ . C'est celle que nous choisirons. Dans cette base, les fonctions coordonnées  $z = \sum z_i e_i \mapsto z_i$  s'identifient aux  $f_i : z_i = f_i(z)$

$$(f_i) : V \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^n, \quad z \mapsto (z_i).$$

Dénotons maintenant par  $(\theta_i)$  une base de  $S_k$  et considérons l'application analytique

$$\begin{aligned} (\theta_i) : V &\rightarrow \mathbf{C}^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C}) \\ z &\mapsto (\theta_i(z)) \mapsto [\theta_i(z)]. \end{aligned}$$

La propriété d'immersion revient à dire que les vecteurs tangents aux courbes coordonnées sont indépendants entre eux et du vecteur rayon (contracté en un point de l'espace projectif). Nous devons donc démontrer que les vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\theta_0(z), \dots, \theta_m(z)), \\ \vec{t}_l &= (\partial\theta_0/\partial z_l, \dots, \partial\theta_m/\partial z_l)(z) \quad (1 \leq l \leq n) \end{aligned}$$

sont  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants. Une relation linéaire entre ces vecteurs peut être écrite

$$\alpha_0 \vec{r} = \sum_{l=1}^n \alpha_l \vec{t}_l,$$

soit, scalairement

$$\alpha_0 \theta_i(z) = \sum \alpha_l \partial \theta_i / \partial z_l(z) \quad (0 \leq i \leq m)$$

(il est bon de se souvenir que le point  $z \in V$  est fixé). La même relation linéaire devra avoir lieu dans tout l'espace  $S_3$  engendré par les  $\theta_i$ :

$$\alpha_0 \Theta(z) = \sum \alpha_l \partial \Theta / \partial z_l(z) \quad \text{pour toute } \Theta \in S_3.$$

Nous allons exprimer cette relation linéaire pour les fonctions particulières

$$\Theta = \Theta_{ab} = \theta_{a+b} \theta_{-a} \theta_{-b} \in S_3$$

produit de translatées de la fonction theta de Riemann. Le point  $z$  étant encore fixé, on aura identiquement en  $a$  et  $b$

$$\alpha_0 \Theta_{ab}(z) = \sum \alpha_l \partial \Theta_{ab} / \partial z_l(z).$$

Introduisons la fonction méromorphe

$$\psi = \sum \alpha_l \partial(\log \theta) / \partial z_l.$$

Par définition,

$$\psi(z+a) = \sum \alpha_l \frac{\partial \log \theta(z+a)}{\partial z_l} = \sum \alpha_l \frac{\partial \log \theta_{-a}}{\partial z_l}(z)$$

et

$$\begin{aligned} & \psi(z+a) + \psi(z+b) + \psi(z-a-b) \\ &= \sum \alpha_l \frac{\partial \log \Theta_{ab}}{\partial z_l}(z) = \sum \alpha_l \frac{\partial \Theta_{ab}}{\partial z_l}(z) / \Theta_{ab}(z) \\ &= \alpha_0 \Theta_{ab}(z) / \Theta_{ab}(z) = \alpha_0 \text{ indépendant de } a \text{ et } b! \end{aligned}$$

Mais pour tout  $a$ , on peut choisir  $b$  de façon que ni  $z+b$  ni  $z-a-b$  n'appartiennent à l'ensemble des pôles de  $\psi$  et l'égalité juste prouvée montre que  $\psi(z+a) \neq \infty$ . Ceci prouve que  $\psi$  est entière ( $a$  était arbitraire). D'autre part, la dérivation logarithmique des identités fonctionnelles satisfaites par  $\theta$

$$\theta(z+\lambda) = \exp \{ -i\pi f_\lambda(\lambda) - 2i\pi f_\lambda(z) \} \cdot \theta(z) \quad (\lambda \in L_2)$$

donne

$$\frac{\partial \log \theta}{\partial z_l}(z + \lambda) = -2i\pi \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_l} + \frac{\partial \log \theta}{\partial z_l}(z)$$

d'où

$$\psi(z + \lambda) = -2i\pi \sum \alpha_l \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_l} + \psi(z).$$

Les fonctions  $f_\lambda$  étant linéaires, les  $\partial f_\lambda / \partial z_l$  sont des constantes et

$$\partial \psi / \partial z_j \text{ est } L_2\text{-périodique (et } L_1\text{-périodique aussi!)}.$$

Ces fonctions entières  $\partial \psi / \partial z_j$  sont donc bornées (elles s'identifient à des fonctions sur l'espace compact  $V/L$ ) et le théorème de Liouville indique qu'elles sont constantes

$$\partial \psi / \partial z_j = c_j \text{ (constante).}$$

Ainsi,  $\psi$  est linéaire affine. Puisqu'elle est holomorphe, elle est  $\mathbf{C}$ -linéaire affine et par  $L_1$ -périodicité (ce sous-groupe est engendré par une  $\mathbf{C}$ -base de  $V$ ) elle est même constante (les  $c_j$  sont nuls):

$$\psi(z + \lambda) = \psi(z) \text{ (en particulier pour } \lambda \in L_2)$$

d'où

$$\sum \alpha_l \partial f_\lambda / \partial z_l = 0.$$

Mais lorsque  $\lambda$  parcourt une base de  $L_2$ , disons la base  $(\lambda_j)$ , les  $f_\lambda$  correspondantes forment un système des coordonnées complexes sur  $V$  (ce sont les fonctions  $f_j$  introduites précédemment) et la matrice  $(\partial f_\lambda / \partial z_l)$  est non singulière (c'est la matrice identité avec le choix indiqué). Donc les  $\alpha_l$  sont tous nuls et la relation linéaire envisagée entre  $\vec{r}$  et les  $\vec{t}_l$  est triviale, prouvant leur indépendance linéaire. Il ne reste plus qu'à démontrer l'injectivité de

$$\begin{aligned} (\theta_i): V/L &\rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C}) \\ z \bmod L &\mapsto [\theta_i(z)]. \end{aligned}$$

Prenons  $z'$  et  $z'' \in V$  avec  $[\theta_i(z')] = [\theta_i(z'')]$ . Il existe donc un scalaire  $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$  tel que

$$\theta_i(z') = \alpha \theta_i(z'') \quad (0 \leq i \leq m)$$

d'où aussi

$$\Theta(z') = \alpha \Theta(z'') \quad \text{pour toute } \Theta \in S_3$$



(puisque les  $\theta_i$  engendrent  $S_3$ ). Revenant aux produits de translatées de la fonction theta de Riemann  $\Theta_{ab}$  utilisés dans la partie précédente de la démonstration, on aura

$$\frac{\theta(z' + a)\theta(z' + b)\theta(z' - a - b)}{\theta(z'' + a)\theta(z'' + b)\theta(z'' - a - b)} = \alpha.$$

Pour chaque  $a$  fixé dans  $V$ , on peut trouver  $b \in V$  de façon que

$$z' + b, z'' + b, z' - a - b, z'' - a - b$$

n'appartiennent pas à la variété des zéros  $Z$  de  $\theta$  (il s'agit d'éviter quatre translatés de  $\pm Z$  qui sont fermés sans point intérieur). L'identité ci-dessus montre alors que la fonction — a priori méromorphe —

$$a \mapsto \theta(z' + a)/\theta(z'' + a)$$

est entière et sans zéro. On peut l'écrire comme exponentielle d'une fonction entière :

$$\theta(z' + a)/\theta(z'' + a) = e^{\psi(a)}.$$

La  $L_1$ -périodicité de  $\theta$  montre que

$$e^{\psi(a+\lambda)} = e^{\psi(a)} \quad (\lambda \in L_1),$$

et donc

$$\psi(a + \lambda) = \psi(a) + 2\pi i n_\lambda \quad (\lambda \in L_1).$$

Prenant ensuite  $\lambda \in L_2$

$$\theta(z' + a + \lambda) = e_\lambda(z' + a)\theta(z' + a) \quad (\lambda \in L_2)$$

et une relation analogue avec  $z''$  au lieu de  $z'$ . On en tire

$$\begin{aligned} e^{\psi(a+\lambda)} &= e^{\psi(a)} e^{-i\pi\{f_\lambda(\lambda) + 2f_\lambda(z' + a) - f_\lambda(\lambda) - 2f_\lambda(z'' + a)\}} \\ &= e^{\psi(a)} e^{2i\pi f_\lambda(z'' - z')} \end{aligned}$$

puis

$$\psi(a + \lambda) = \psi(a) + 2i\pi f_\lambda(z'' - z') + 2i\pi m_\lambda \quad (\lambda \in L_2).$$

Ainsi,  $\psi(a + \lambda) - \psi(a)$  est indépendant de  $a$  pour tout  $\lambda \in L$  et la considération des dérivées partielles  $\partial\psi/\partial a_i$  comme ci-dessus, fournit

$$\partial\psi/\partial a_i \text{ entière, } L\text{-périodique (donc bornée)}$$

et donc constante, de sorte que  $\psi$  est  $\mathbf{C}$ -linéaire affine. On écrira

$$\psi(a) = 2i\pi \sum v_i a_i + v.$$

Substituant cette expression dans les relations trouvées pour  $\psi(a + \lambda)$  et prenant  $\lambda = \lambda_j \in L_2$  (correspondant aux éléments de la base duale de  $(e_i) \subset L_1$ ), on voit

$$\psi(a + \lambda_j) = \psi(a) + 2i\pi(z''_j - z'_j) + 2i\pi m_j \quad (m_j = m_{\lambda_j}).$$

Mais la linéarité de  $\psi$  donne directement

$$\psi(a + \lambda_j) - \psi(a) = 2i\pi \sum v_l f_l(\lambda_j).$$

Par comparaison, on trouve donc

$$f_j(z'' - z' + \sum m_l e_l) = z''_j - z'_j + m_j = \sum v_l f_l(\lambda_j) = \sum v_l f_j(\lambda_l).$$

Cette égalité de composantes fournit l'égalité vectorielle

$$z'' - z' = \sum v_l \lambda_l - \sum m_l e_l$$

avec

$$\lambda_l \in L_2, m_l e_l \in L_1$$

et la démonstration sera terminée dès qu'on aura remarqué que les  $v_l$  sont des entiers

$$(z'' - z' \in L_1 + L_2 = L \Rightarrow z'' = z' \in V/L).$$

Or on a vu en cours de route

$$\psi(a + \lambda) = \psi(a) + 2i\pi n_\lambda \quad (n_\lambda \in \mathbf{Z} \text{ lorsque } \lambda \in L)$$

et en substituant l'expression linéaire affine de  $\psi$

$$\psi(a) = 2i\pi \sum v_l a_l + v$$

on trouve sans peine  $v_l = n_l \in \mathbf{Z}$ .

q.e.d.

### 3. COMMENTAIRES CONCERNANT LA PARTIE ANALYTIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Pour démontrer le théorème de plongement, nous avons considéré les espaces vectoriels  $S_k$  formés des fonctions entières  $f$  sur  $V$  satisfaisant les équations fonctionnelles

$$f(z + \lambda) = e_\lambda(z)^k f(z) \quad (\lambda \in L).$$