Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1982)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES
Autor: Robert, Alain
Kapitel: 5. Commentaires concernant la partie cohomologique de la démonstration
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52234

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

5. Commentaires concernant la partie cohomologique de la démonstration

C'est la partie cohomologique de la preuve (section précédente) qui permet de donner un exemple de tore complexe non projectif (cf. sec. 1, remarque 4). Il est plus facile de construire une variété analytique (lisse) compacte non projective. A cet effet, on peut construire les *surfaces de Hopf* comme suit. On regarde le corps des quaternions réels

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$$

($i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k, \ldots$) comme espace vectoriel complexe de dimension 2

$$\mathbf{H} = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i) \oplus (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i)j = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}j\,.$$

On choisit ensuite un quaternion réel $\gamma > 1$ de sorte que le sous-groupe

$$\Gamma = \{\gamma^n : n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{H}^\times$$

du groupe multiplicatif des quaternions non nuls est discret (donc fermé). L'espace homogène

$$X_\gamma = \mathbf{H}^\times/\Gamma \quad (\dim_{\mathbf{C}} X_\gamma = 2)$$

est une variété analytique (lisse) compacte (c'est même un groupe de Lie complexe puisque γ est réel, donc Γ contenu dans le centre de $\mathbf{H}^\times$). La décomposition polaire

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^\times &\to S^3 \times \mathbf{R}_+^\times \\ q &\mapsto (q/|q|, |q|) \end{aligned}$$

où S^3 dénote la sphère unité de l'espace $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$, est un difféomorphisme. Elle induit un difféomorphisme

$$X_\gamma \xrightarrow{\sim} S^3 \times \mathbf{R}_+^\times/\Gamma = S^3 \times S^1\,.$$

Comme l'homologie d'une sphère est donnée par la décomposition cellulaire

$$S^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\} \text{ (opérateur bord trivial)},$$
$$H_i(S^n, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \text{ si } i = 0 \text{ ou } n,\ H_i = 0 \text{ sinon},$$

la formule de Künneth permet de calculer l'homologie de X_γ (l'homologie des sphères est sans *torsion*; d'ailleurs, il suffirait de calculer l'homologie sur un corps, par exemple **Q**, **R** ou **C**). En particulier

$$H_k(S^1) \otimes H_l(S^3) = 0 \text{ pour } k + l = 2$$

implique

$$H_2(X_\gamma) = H_2(S^1 \times S^3) = 0$$

puis $H^2(X_\gamma, \mathbf{C}) = 0$. Mais, *pour toute variété projective* X, *on a* $H^2(X, \mathbf{C}) \neq 0$. En effet, si X est plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$, la restriction de la forme de Fubini-Study de $\mathbf{P}^m(\mathbf{C})$ à X fournit une 2-forme fermée positive ω sur X dont la classe de cohomologie est non nulle $0 \neq [\omega] \in H^2(X, \mathbf{C})$ (si la forme ω était exacte, toutes les puissances extérieures $\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ seraient aussi exactes et en particulier, considérant la puissance égale à la dimension complexe de X, $\int_X \omega \wedge \ldots \wedge \omega = 0$ ce qui n'est pas le cas, puisque cette puissance extérieure est une forme volume sur X : l'intégrale précédente est positive — on suppose naturellement $\dim_{\mathbf{C}} X > 0$!).

Puisque tous les tores sont difféomorphes, on ne peut trouver d'obstruction à un plongement projectif aussi simple que pour les surfaces de Hopf. Il a été nécessaire de faire intervenir l'*intégralité* de la forme de Fubini-Study. L'homologie d'un tore, i.e. d'un produit de cercles, est aussi donnée par la formule de Künneth (l'homologie d'un cercle S^1 étant sans torsion, l'homologie du tore est engendrée par H_1)[1]). Mais les calculs faits dans la section précédente permettent d'être même plus explicites. Prenons en effet un tore V/L et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant \dim_{\mathbf{R}}(V)$. Toute forme différentielle de degré k sur V/L peut être considérée comme k-forme L-périodique sur V et développée en série de Fourier. Seuls les termes constants de la série de Fourier nous intéressent (toute forme fermée est cohomologue à ses termes constants). Par restriction à l'origine, on obtient donc une k-forme alternée sur V. On en déduit les isomorphismes

$$H^k(V/L, \mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^k(V, \mathbf{R}) = \wedge^k V^*$$

puis

$$\dim_{\mathbf{R}} H^k(V/L, \mathbf{R}) = \binom{n}{k} \qquad \text{si } n = \dim_{\mathbf{R}}(V).$$

Lorsqu'on désire établir des isomorphismes analogues sur **Z**, on doit utiliser

[1]) Puisque V est contractible, $V \to V/L$ s'identifie au revêtement universel du tore V/L et $\pi_1(V/L) \cong L$. En particulier $H_1(V/L, \mathbf{Z}) \cong L$.

la formule de Künneth. Par exemple, pour $k = 2$, le théorème de Künneth montre que les 2-cellules entières

$$c_{\lambda\mu}: (s, t) \to s\lambda + t\mu \bmod L \qquad (\lambda, \mu \in L)$$
$$[0, 1]^2 \to V/L$$

engendrent $H_2(V/L, \mathbf{Z})$ (dans la sec. 4 nous n'avons utilisé que l'intégralité de ces cellules particulières). L'intégralité d'une 2-forme alternée sur L *caractérise* les éléments de $H^2(V/L, \mathbf{Z})$.

La construction transcendante des surfaces de Hopf présente tout de même quelque analogie avec celle des tores complexes (de dimension 2). En effet, lorsque $\dim_{\mathbf{C}}(V) = 2$, on peut effectuer un quotient par un réseau L en deux temps. Choisissant d'abord une base complexe de V dans un système de générateurs de L, on peut identifier V à $\mathbf{C}^2$ et un facteur direct L_1 de L à $\mathbf{Z}^2$. Donc

$$V/L = V/L_1 \oplus L_2 = \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 \Big/ L_2'$$

où L_2' dénote le sous-groupe image de L_2 dans le quotient. Avec l'exponentielle normalisée

$$\underline{e}(z) = \exp(2\pi i z),$$

on peut identifier $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ à $\mathbf{C}^\times$ et

$$V/L \cong \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times/L_2'$$

où L_2' est un sous-groupe discret (de rang 2) de $\mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$. Les surfaces de Hopf étaient obtenues comme quotient de $\mathbf{C} \times \mathbf{C} - (0, 0)$ par un sous-groupe discret (de rang 1 de $\mathbf{H}^\times$).

La principale différence entre les deux situations envisagées provient du fait que les tores complexes sont toujours *kählériens*, et en particulier leur H^2 est non nul, tandis que les surfaces de Hopf ne le sont pas.

6. Classification de variétés abéliennes

Commençons par déterminer les applications holomorphes entre tores complexes.

Proposition. *Soient V/L et V'/L' deux tores complexes et $f: V/L \to V'/L'$ une application holomorphe. Alors $f(v) = f_0(v)\, f(0)$ où f_0 est un homomorphisme provenant d'une application* $\mathbf{C}$*-linéaire $F: V \to V'$ telle que $F(L) \subset L'$.*